



Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 13. 01. 2017

1.1 Peťov ďalekohľad

Peťo zvažuje kúpu nového ďalekohľadu. Po dlhoročnom váhaní a zvážení finančných možností mu na výber zostali dva ďalekohľady rovnakej konštrukcie. Jeden s priemerom objektívu 80 mm a ohniskom 480 mm, druhý s priemerom 120 mm a ohniskom 720 mm. Koľko krát viac hviezd uvidí Peťo vo väčšom z nich, ak v oboch použije rovnaký okulár?

Pozn.: Každý okulár je daný svojou ohniskovou vzdialenosťou a zorným polom, ktoré dokáže korektne vykresliť. Lacnejšie okuláre majú zorné pole napríklad 52° . Ak okulár v danom ďalekohľade zväčšuje $100\times$, uvidíme ním časť oblohy s uhlovým priemerom $52^\circ/100 = 0,52^\circ$.

1.2 Gravitačné vlny

V tejto úlohe sa pozrieme na objav gravitačných vln zo začiatku tohoto roka a pokúsime sa jednoduchým modelom založeným v princípe na rozmerovej analýze objasniť výsledky experimentu publikovaného v B.P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Physical Review Letters **116**, 061102 (2016).

Predpokladajme, že počas procesu spájania dvoch čiernych dier hmotností M a m sa čierne diery pohybujú v každom momente po kruhovej dráhe s polomerom R a r okolo spoločného hmotného stredu uhlovou rýchlosťou ω .

- Nájdite ω ako funkciu M , m , r , R a G , kde G je gravitačná konštanta.
- Nájdite vzťah pre celkovú energiu systému ako funkciu ω .

Emisia gravitačných vln

Newtonova teória gravitácie nepredpokladá vznik gravitačných vln, ktoré by so sebou odnášali energiu zo systému. Na to, aby sme analyzovali proces spájania dvoch čiernych dier, musíme nájsť vzťah pre výkon príslušajúci emisii gravitačných vln v systéme. Gravitačné žiarenie je emitované, keď sa príslušne pohybujú veľmi ťažké objekty, podobne ako elektromagnetické žiarenie emitované pri zrýchľovaní nabitých častíc. Pri vhodných podmienkach je pole gravitačného žiarenia dané zmenou kvadrupólového momentu rozdelenia hmotnosti, ktoré, ako sa ukazuje v našom prípade, sa redukuje na obyčajný moment zotrvačnosti I , ktorý poznáme z mechaniky. Výkon radiačného žiarenia je úmerný kvadrupólovému momentu, konkrétne

$$P \sim \dot{I}^2.$$

Podobný vzťah nachádzame aj pri elektromagnetických vlnách, kde je hustota energie úmerná štvorcu intenzity elektrického resp. indukcie magnetického poľa. Očakávame, že výkon bude taktiež závisieť na frekvencii obehu čiernych dier ω a fundamentálnych konštantách G a c , kde c je rýchlosť svetla.

- Rozmerovou analýzou nájdite príslušné hodnoty exponentov v nasledujúcom vzťahu

$$P = \alpha I^2 \omega^\epsilon G^\eta c^\rho.$$

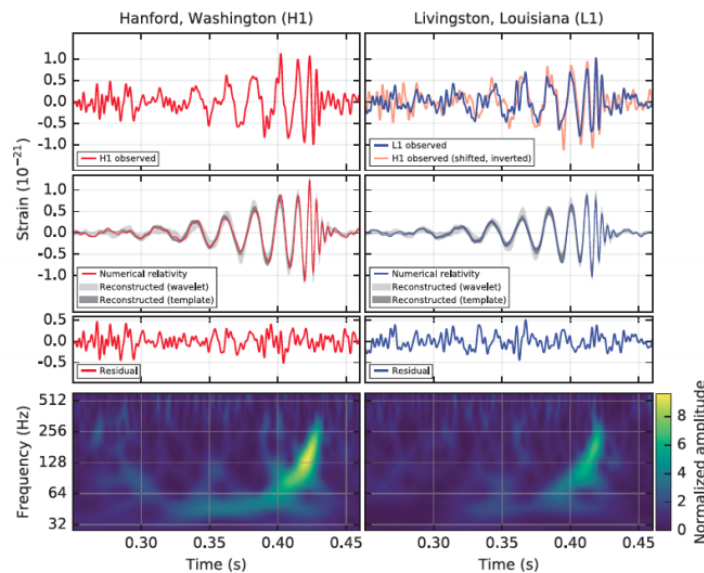
Bezrozmerná konštanta α sa nedá nájsť rozmerovou analýzou. Všeobecná teória relativity dáva predpoveď $\alpha = 32/5$. Dá sa ukázať, že uhlová frekvencia emisie gravitačných vln súvisí s obehovou uhlovou rýchlosťou ako $\omega_{\text{vlny}} = 2\omega$.

d) Využitím predchádzajúceho výsledku a výsledku z časti *b* nájdite výraz pre $d\omega/dt$.

Chirp

Pod slovíčkom chirp (<https://en.wikipedia.org/wiki/Chirp>) sa skrýva jav, pri ktorom postupne rastie frekvencia pozorovaného signálu v čase.

e) Na základe predchádzajúceho výsledku nájdite vzťah medzi počiatočnou frekvenciou f_i a konečnou frekvenciou f_k , ktoré pozorujeme v signáli interferometra pozorujúceho spojenie dvoch čiernych dier s príslušnými hmotnosťami m a M počas doby t .



Obrázok 1: *Dáta z experimentu LIGO. Dôležitý je pre nás posledný vstup, závislosť frekvencie pozorovaného signálu ako funkcia času.*

f) Výraz $(Mm)^{3/5}/(m+M)^{1/5} = \mathcal{M}$ nazveme hmotnosť chirpu \mathcal{M} . Odhadnite hodnotu \mathcal{M} pri evente, vďaka ktorému sa podarilo overiť existenciu gravitačných vln, na základe grafu publikovaného v B.P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Physical Review Letters **116**, 061102 (2016), ktorý nájdete aj vyššie.

Spojenie čiernych dier

Schwarzschildov polomer je taká vzdialenosť od objektu, pri ktorej je úniková rýchlosť rovná rýchlosti svetla. Predpokladajme, že čierne diery sa spoja v momente, keď sa stretnú ich horizonty udalostí (polomer horizontu udalostí je pre čierne diery rovný príslušnému Schwarzschildovmu polomeru).

- g) Využitím predchádzajúcich výsledkov a dát, ktoré môžeme vyčítať z priloženého grafu, odhadnite hmotnosti čiernych dier m a M .
- h) Využitím predchádzajúcich výsledkov a dát, odhadnite aj celkovú energiu E , ktorá bola vyžiarená počas spájania čiernych dier vo forme gravitačných vln.

- i) Výsledky, ktoré ste dostali vo všetkých úlohach, porovnajte so skutočnými výsledkami určenými experimentom LIGO.

1.3 Fotonický kryštál je späť!

Najjednoduchší fotonický kryštál si môžete predstaviť ako obrovské množstvo dotýkajúcich sa tenkých platničiek $ABABABA\dots$ (ich hrúbka je porovnateľná s vlnovou dĺžkou svetla; platničky A , resp. B sú navzájom všetky rovnaké).

Ukazuje sa, že takéto médium má zvláštne schopnosti. Priepustnosť svetla závisí od jeho vlnovej dĺžky: vznikajú pásy dovolených a zakázaných vlnových dĺžok, pre ktoré je prostredie úplne priehľadné, resp. úplne nepriehľadné. Najkrajšie na tom všetkom je, že intervaly (ne)priehľadnosti závisia len od hrúbok a indexov lomov platničiek A, B – sú teda dobre nastaviteľné podľa potrieb. Potenciálne aplikácie sú obrovské.

- a) Uvažujte jednu platničku B s indexom lomu $n = 2$ a s hrúbkou $d/2$, ktorá je umiestnená vo vzduchu. Uvážiac všetky nekonečne veľa odrazov nájdite analyticky presný výraz pre priepustnosť doštičky v závislosti od vlnovej dĺžky svetla λ . Pre riešenie tejto časti úlohy sa vám môže zísť Zbierka FX alebo tzv. **metóda prechodovej matice**.
- b) Uvažujte fotonický kryštál $ABABABA\dots$ s presne 100 platničkami B ako vyššie. Úlohu platničiek A bude hrať vzduch s indexom lomu $n = 1$ a hrúbkou d . Numericky získajte grafickú závislosť pre priepustnosť takehoto fotonického kryštálu v závislosti od vlnovej dĺžky použitého svetla. Využite výsledok z predchádzajúcej úlohy. Na základe výsledkov posúďte prítomnosť zakázaných a povolených pásov vlnových dĺžok. *Hint: Silno odporúčame využiť **metódu prechodovej matice** [https://en.wikipedia.org/wiki/Transfer-matrix_method_\(optics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Transfer-matrix_method_(optics))*

1.4 Nalomená vodivosť

Kubo sa hrabal v skrini a našiel v nej nekonečne dlhú uzemnenú vodivú rovinu. Po ruke mal aj bodový náboj Q , no už ho nebavil stále ten istý problém bodového náboja a vodivej roviny.

- a) Kubo od zlosti ohol svoju nekonečnú vodivú rovinu tak, že nové dve polroviny zvierali uhol α . Bodový náboj položil na os tohto uhla. Akou silou pôsobí nalomená rovina na náboj Q , ak sa nachádza vo vzdialenosti l od priamky nalomenia? Predpokladajme, že $\alpha = \pi/n$ kde $n = 1, 2, \dots$. Výsledok očakávame v tvare sumy, ktorá bude sčítavať cez násobky uhla α .
- b) Akú prácu treba vykonať na prenesenie náboja z nekonečna na toto miesto? Pre rôzne n pouvažujte, v ktorých prípadoch zlomená rovina náboj pritiahne a v ktorých ho odtlačí preč.

1.5 Problém vo vlaku

V tejto úlohe sa pozrieme na dynamiku vo vzduchu vo veľmi dlhých vlakoch. Budeme uvažovať zjednodušený model, v ktorom nie sú vozne od seba odseparované, takže tvoria jeden veľký priestor dĺžky 200 m. Vo všetkých vozňoch sú zatvorené okná, takže žiadny vzduch nemôže vstúpiť ani opustiť tento veľký priestor (táto aproximácia nemá príliš ďaleko od slovenskej reality). Keďže vlak je rádovo dlhší ako širší, v princípe budeme riešiť jednorozmerný problém, takže všetky nasledujúce rovnice sa príslušným spôsobom zjednodušia.

Stacionárny režim

V tejto časti skúsime sa pokúsiť nájsť distribúciu vzduchu vnútri v prípade, že vlak prichádza alebo opúšťa stanicu. Na vzdialenostiach väčších, ako je stredná dráha molekúl vo vzduchu, sa vzduch správa v princípe

ako tekutina. V inerciálnej vzťažnej sústave vzduchu splňa rovnicu kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

a Eulerovu rovnicu (Newtonov druhý zákon pre tekutiny)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g,$$

kde $\rho(x, t)$ je hustota vzduchu, $p(x, t)$ je tlak, $v(x, t)$ je rýchlosť tekutiny a g je tiažové zrýchlenie. Na to, aby sme vyriešili tento systém rovníc, potrebujeme ešte nejakú rovnicu, ktorá nám previaže hustotu a tlak – stavovú rovnicu. Budeme predpokladať, že vzduch vo vlaku môžeme aproximovať ako ideálny plyn, čiže platí

$$p = \rho RT,$$

kde $R = 290 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ je špecifická konštanta pre vzduch. Prítomnosť rušňa a niekoľko málo pasažierov udržuje vzduch vnútri vlaku na konštantnej teplote $T = 300 \text{ K}$. Predpokladáme, že počas prichádzania resp. odchádzania zo stanice sa vlak pohybuje s konštantným zrýchlením a .

- Ako musíme zmeniť Eulerovu rovnicu, aby sme ju mohli použiť v neinerciálnej vzťažnej sústave?
- Pozrime sa najprv na stacionárne riešenie v termodynamickovej rovnováhe. Vypočítajte hustotu vzduchu $\rho_{\text{eq}}(x)$ ako funkciu pozície x vnútri vlaku.
- Ak označíme $\bar{\rho}$ priemernú hustotu vzduchu pozdĺž vlaku a $\delta\rho_{\text{eq}}(x) = \rho_{\text{eq}}(x) - \bar{\rho}$ odchýlku od priemernej hodnoty, nájdite odhad pre maximálnu bezrozmernú odchýlku hustoty

$$\delta_{\text{eq}}(x) = \frac{\rho_{\text{eq}}(x)}{\bar{\rho}} - 1.$$

Pocíťovanie tlaku

Isto poznáte, že keď si dáte hlavu pod vodu, hydrostatický tlak na ušný bubienok začne byť dostatočne cítiť aj v hĺbke okolo 20 cm.

- Aké je minimálne zrýchlenie vlaku, pri ktorom človek stojaci na konci vlaku pocíti rozdiel svojimi ušami? Predpokladáte, že je možné pocítiť tento rozdiel v typickom vlaku? Vysvetlite tento rozdiel aj pomocou typického zrýchlenia vlaku. Porovnajtie výsledky pre vlak s typickým dopravným lietadlom.

Keďže δ je malá, môžeme časový vývoj vzduchu vnútri vlaku opisovať linearizovanými rovnicami pre prúdenie tekutín. Pre malé adiabatické zmeny sú zmeny hustoty a tlaku jednoducho previazané nasledujúcou rovnicou,

$$\delta p(x, t) \equiv p(x, t) - \bar{p} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \delta \rho(x, t) \equiv c_s^2 \delta \rho(x, t),$$

kde c_s je (adiabatická) rýchlosť vzduchu.

- Využite predchádzajúci vzťah na to, aby ste vylúčili tlak z Eulerovej rovnice. Rozviňte rovnice kontinuity a Eulerovej rovnice do prvého rádu v malých zmenách δ a v okolo statického homogénneho riešenia v pokoji

$$\rho(x, t) = \bar{\rho} (1 + \delta(x, t)).$$

Kombináciou týchto dvoch rovníc (alebo ich derivácií) nájdite jednu rovnicu pre δ . Stručne opište riešenie tejto rovnice.

Vlna v zrýchľujúcom vlaku

Rozviňte rovnice continuity a Eulerovej rovnice do prvého rádu v malých zmenách δ a v okolo statického, ale nehomogénneho riešenia v prípade, že vlak zrýchľuje s konštantným zrýchlením.

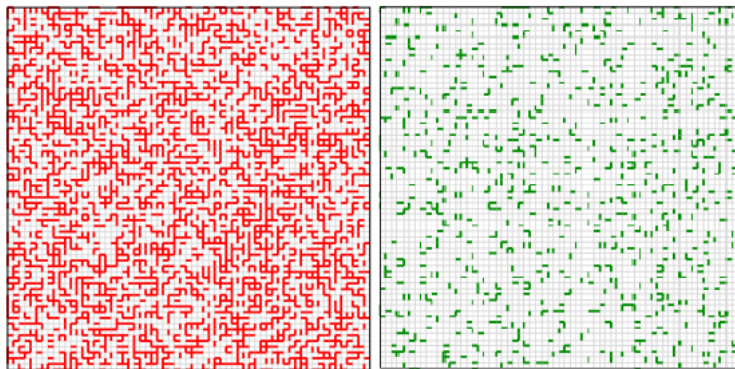
$$\rho(x, t) = \rho(x) (1 + \delta(x, t)).$$

Využitím niekoľkých predchádzajúcich rovníc nájdite riešenie pre $\delta(t, x)$.

1.6 Perkolácia

Predstavme si mriežku štvorcíkov. Každý štvoreček môže byť obsadený s pravdepodobnosťou p alebo byť prázdny s pravdepodobnosťou $1 - p$. Obsadenosť každého štvorčeka je náhodná.

Ak je p malé, môžeme vidieť niekoľko malých ostrovčekov obsadených štvorcíkov v prázdnom „oceáne“ neobsadenej mriežky. Ako postupne zvyšujeme p , malé ostrovčeky (clustre) sa zväčšujú, až nastane situácia, kedy existuje spojitý prechod z ľavej strany mriežky na pravú stranu mriežky (tzv. perkolácia).



Obrázok 2: Dvojmerná štvorcová mriežka pri pravdepodobnosti obsadenosti $p = 0.4$ a $p = 0.1$. Na obrázku sú obsadzované hrany štvorcíkov, nie samotné štvorčeky. Ide však o tú istú úlohu.

Táto jednoduchá myšlienka je základom **teórie perkolácie**. Vyzerá jednoducho, ale má bohaté aplikácie v problémoch reálneho života, ako sú napríklad lesné požiare alebo tok kvapalín cez pórovitú štruktúru (viď **Introduction to percolation theory** od Stauffer a Aharony).

V tejto úlohe budeme študovať štvorcové mriežky a budeme hľadať medznú hodnotu p_c , pri ktorej sa objaví perkolujúci stav.

Perkolácia v 1D

Uvažujme jednorozmernú mriežku (pásik) veľkosti N , kde každý bod mriežky je obsadený s pravdepodobnosťou p . Spočítajte počte clusterov, t.j. počet obsadených súvislých polí pri danej pravdepodobnosti p . Nájdite medznú hodnotu p (**fázový prechod**) p_c , pri ktorej bude najväčší cluster makroskopicky veľký. Ak označíme N_{lc} veľkosť najväčšieho clustra a N_o počet obsadených bodov na pásiku, tak veľkosť perkolujúceho clustra je $P = N_{lc}/N$.

Opakujte merania pre rozličné hodnoty N a na ich základe dajte predpoveď $N \rightarrow \infty$.

Perkolácia v 2D

Druhý rozmer prináša nový stupeň voľnosti, v ktorom môže cluster rásť, preto by mala byť medzná hodnota p_c iná.

Uvažujme dvojrozmernú štvorcovú mriežku rozmeru $N \times N$. Ako v predchádzajúcom prípade, nájdite medznú hodnotu p_c , kedy veľkosť najväčšieho clustra začína rapídne rásť.

Ak zvolíme $p > p_c$ P je úmerné $(p - p_c)^\alpha$, kde α je tzv. **kritický exponent**. Nájdite numerickú hodnotu tohto exponentu.

(Bonus) Perkolácia v 3D

Nájdite medznú hodnotu a kritický exponent aj pre tento prípad.

Ako na to?

- Počet clustrov a ich veľkosť môžete spočítať napríklad aj pomocou [flood fill algoritmu](#). Avšak s naivnou implementáciou si nevystačíte, keďže sa dopracujete k problému **stack overflow**, teda pretečeniu zásobníka s inštrukciami.
- V simulácii použite periodické okrajové podmienky.
- Pre každú hodnotu p a N vykonajte niekoľko simulácie a následne zoberte priemerné hodnoty.