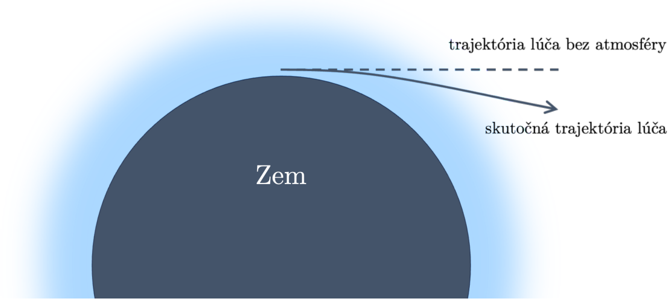
Fyzikálny korešpondenčný seminár, kategória FX
XIX. ročník, 2023/2024
FX, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 15. 01. 2024

1.1 Silný lom **9 bodov**

Kvôli závislosti indexu lomu vzduchu s nadmorskou výškou sa lúče svetla vyslané z povrchu Zeme lámu. Napríklad, predstavme si že vyšleme lúč z povrchu Zeme horizontálne. Kým sa takýto lúč dostane do vesmíru, bude zlomený a vyjde zo Zeme pod nenulovým uhlom ku jeho originálnemu smeru (pozri obrázok).



Obrázok 1.1.1: *Lúč svetla*

V tejto úlohe sa vás pýtame na odhad, ako veľmi by sme museli zvýšiť teplotu Zeme, aby takýto horizontálne vyslaný lúč do vesmíru vôbec neunikol, t. j. aby bol zlomený tak, že okamžite narazí do Zeme.

Uvažujte izotermickú atmosféru a rátajte s tým, že za súčastných podmienok ($T = 300$ K) je gradient indexu lomu $\Delta n = 3 \cdot 10^{-8}$ na každý meter výšky. Zem uvažujte ako dokonalú guľu s polomerom $R = 6400$ km.

1.2 Supravodivé kyvadlo **9 bodov**

Maroš má pružinové kyvadlo s tuhosťou k, kde závažie s hmotnosťou M je súčastne aj magnet zanedbateľných rozmerov s dipólovým momentom m. Takéto kyvadlo by v prázdnom priestore oscilovalo s uhlovou frekvenciou $\Omega_0 = \sqrt{M/k}$.

Maroš však položil takéto kyvadlo ponad veľkú supravodivú dosku vo vzdialenosti h od rovnovážnej polohy kyvadla (bez prítomnosti supravodivej dosky). Ako sa zmení uhlová frekvencia ak je dipól zafixovaný tak, že jeho os je vždy orienovaná vertikálne?

(Gravitáciu a magnetické pole Zeme zanedbajte.)

1.3 Elektromagnetismus

9 bodov

Časť A vyžaduje znalosť vektorového kalkulu, zatiaľ čo časť B nie a môžete ju riešiť aj bez A. V časti A odvodíme známy Larmorov vzorec pre výkon vyžiarený zrýchľujúcim nábojom. V časti B si ukážeme dve zaujímavé využitia tohto vzorca.

Časť A

V tejto časti uvažujeme zoskupenie nábojovej hustoty, ktorá je lokalizovaná v malej časti priestoru a odvodíme, aké elektrické a magnetické pole pozoruje pozorovateľ ďaleko vzdialený od tohto zoskupenia. Takto sa napríklad zvyknú modelovať antény.

Keďže $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, magnetické pole v priestore sa dá všeobecne napísať ako $B = \nabla \times \boldsymbol{A}$ pre nejaký vektorový potenciál $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$. (Nasleduje motivácia) podobne ako pri (statickom) elektrickom poli, kde $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$. Potom vieme z Coulombovho zákona, že

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}',$$

kde $\mathcal{V}$ je objem, v ktorom sa nachádza nábojová hustota ρ a $\boldsymbol{x}'$ je integračná premenná.

Pre $\boldsymbol{A}$ vo veľkej vzdialenosti $r = |\boldsymbol{x}|$ od lokalizovanej prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ platí vo všeobecne dynamickej situácii

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', t - r/c)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \quad + \quad \mathcal{O}\left(\frac{d}{\tau c}\right),$$

kde d je charakteristický rozmer priestoru s nenulovou $\boldsymbol{J}$ a τ je charakteristický čas, na ktorej sa $\boldsymbol{J}$ mení. $O\left(\frac{d}{\tau c}\right)$ teda obsahuje relativistické korekcie.

(i) Odôvodnite, prečo sa v argumente času $\boldsymbol{J}$ v integráli nachádza $t - r/c$ a nie t.

(ii) S využitím toho, že

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(J_j x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}J_j\right)x_i + J_i = -\dot{\rho}x_i + J_i$$

a Gaussovej integrálnej vety (divergence theorem) preveďte integrál pre $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ do podoby

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\boldsymbol{p}}(t - r/c) \quad + \quad O\left(\frac{d}{\tau c}\right),$$

kde $\boldsymbol{p}$ je dipólový moment zoskupenia nábojov ρ.

(iii) Pomocou $\boldsymbol{A}$ vypočítajte $\boldsymbol{B}$. Čo musí platiť, aby sme mohli približne ignorovať člen $1/r^2$ a ponechať len $1/r$? V nasledujúcich výpočtoch pokračujte už len s členom úmerným $1/r$.

(iv) Nájdite elektrické pole $\boldsymbol{E}$ do $\mathcal{O}(1/r)$ ďaleko od zdroja. (Nápoveda: stačí vám k tomu Ampérov zákon v tvare $\dot{E} = c^2\nabla \times \boldsymbol{B}$)

(v) Tok výkonu elektromagnetického žiarenia je daný Poyntingovým vektorom $\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$. Nájdite $\boldsymbol{S}$ vo veľkej vzdialenosti od zdroja. Integrovaním $\boldsymbol{S}$ cez povrch gule polomeru R a urobením limity $R \to \infty$ ukážte, že vyžiarený výkon je

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c}|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2.$$

(vi) Objasnite, aké podmienky musia platiť, aby bol predošlý výsledok dobrou aproximáciou.

Časť B

(i) Použitím rovnice z časti A, podúlohy (v) ukážte, že v klasickej fyzike elektrón obiehajúci okolo protónu po kružnicovej trajektórii je nestabilný a odhadnite za aký čas (rádovo) skolabuje. (Toto bol jedným z problémov klasickej fyziky, ktorý kvantová fyzika vyriešila).

(ii) Nerelativistická častica s hmotnosťou m a nábojom q sa hýbe v 1D v kladnom x smere a narazí na „schodový potenciál“

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ f(x) & 0 \leq x \leq L, \\ V_0 & L < x, \end{cases}$$

kde $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ je monotónne rastúca, diferencovateľná funkcia s $f(0) = 0$ a $f(L) = V_0 > 0$.

a. Predpokladajte, že vyžiarená energia je zanedbateľná v porovnaní s celkovou energiou častice E, teda

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

sa počas pohybu častice nemení. Pre $E > V_0$ ukáže, že celkový vyžiarený výkon je

$$\Delta E_{\text{Rad}} = \frac{q^2 \mu_0}{6\pi m^2 c} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{E - f(x)}} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right)^2 dx.$$

Nájdite podobný vzorec pre ΔE_{Rad} v prípade, že $E < V_0$.

b. Zoberme si jednoduchý príklad $f(x) = V_0 x / L$. Vyjadrite explicitne ΔE_{Rad} v oboch prípadoch $E < V_0$ aj $E > V_0$. Nakreslite graf ΔE_{Rad} od E. Pre aké E je ΔE_{Rad} maximálne?

c. Zopakujte (β) pre $f(x) = V_0 x^2 / L^2$.

d. Zovšeobecnite pozorovanie toho, kedy nastáva maximum ΔE_{Rad} a dokážte svoje tvrdenie pomocou časti (α).