

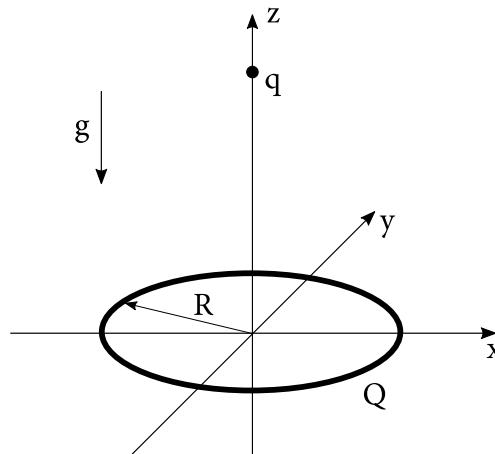
Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 14. 06. 2020

1.1 Nabitá slučka

9 bodov

Jindra má doma rovnomerne nabitý prstenec s polomerom R s nábojom Q v homogénnom gravitačnom poli g . Za akých podmienok bude existovať stabilná poloha pre náboj s veľkosťou q a hmotnosťou m , ak ho fixne tak, že sa náboj bude môcť pohybovať len po osi z ako na obrázku? Prečo by bez fixnutia na z -ovú os bol náboj v nestabilnej polohe?



Obrázok 1: Prstenec a jeho orientácia v gravitačnom poli

Potom prišiel Robo s dipólom s dipólovým momentom p a rovnakou hmotnosťou m .¹

Ako vyzerá analogická podmienka na stabilnú polohu a orientáciu dipólu, ak ho tiež fixneme na tú istú os (a pôvodný Jindrov náboj q dáme preč)?

Potrebujeme ho naozaj fixnúť na z -ovú os, aby bol stabilný? Pri rátaní považujte moment zotrvačnosti dipólu za zanedbateľne malý.

1.2 Netradičná atmosféra

9 bodov

Ppershing si čítal knihu *Rendezvous with Rama* od Arthura C Clarke, kde je popísaný zvláštny mimozemský objekt. Ide o cylinder s priemerom 16 km rotujúci raz za 4 minúty okolo vlastnej osi. Arthur popisuje správanie sa umelej gravitácie v tomto rotujúcom cylindri, tvrdí, že na okraji má veľkosť okolo polovice veľkosti gravitačného

¹Dipól sa dá predstaviť ako dva veľmi veľké náboje $+q$ a $-q$ vzdialené od seba o veľmi malú vzdialenosť d . Dipólový moment je definovaný ako $p = qd$. V externom elektrickom poli má dipól potenciálnu energiu $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ a pôsobí naň sila $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$. Význam trojuholníka nájdete Googlením pod názvom *nabla operátor*.

zrýchlenia na Zemi. Táto úloha je však o inom – o atmosfére v takomto objekte. Podľa knihy je v strede cylindra nedýchatelná atmosféra (slabý tlak), no kniha udáva aj tlak 300 mbar vo vzdialenosti 1 km od stredu.

- Spočítajte ako vyzerá tlak v závislosti od vzdialenosti od stredu. Je atmosféra naozaj nedýchatelná v strede a priateľná na okraji? Atmosféru modelujte ako izotermickú.
- Uvažujte element vzduchu vo výške h , ktorý sa konvekciou posunie o kúsok nahor. Je takáto atmosféra stabilná mechanicky (t.j. vzduch ostane v pokoji) a termodynamicky?
- Berúc do úvahy výsledky predošlej časti a zanedbávajúc koeficient prenosu tepla navrhните lepší model atmosféry. Spočítajte úlohu o mimozemskom objekte s takou atmosférou.

1.3 Vodná hladina

9 bodov

Peťo narazil na takýto príklad z fyziky:

Majme veľkú nádobu s priemerom D naplnenú kvapalinou, ktorú roztočíme uhlovou rýchlosťou Ω . Ak na vodu zasvietime zhora svetlo, odrazom od hladiny sa svetlo zaostrí do jedného bodu – ohniska. Nájdite, kde leží tento bod.

Zdal sa mu však veľmi nerealistický. Keď predsa roztočí vodu v pohári miešaním, nezdá sa mu, že by jej hladina mala dokonale parabolický povrch, ako napovedá zadanie. (Pozrite napríklad toto video: <https://youtu.be/tbaDqpR5xFY>)

Táto úloha bude o lepšom modeli, ktorý popisuje tvar povrchu tesne po miešaní.

- Na zahriatie spočítajte tradičný príklad, zistíte tvar hladiny a bod, kam sa zaostrí svetlo svietiace priamo zhora.
- Ďalej vyhládajte Navier-Stokesove rovnice pre nestlačiteľnú kvapalinu s viskozitou vo vhodných súradniciach, kde je veľa členov nulových zo symetrie problému. Nájdite dve nezávislé riešenia pre časovo-nemenné prúdenie kvapaliny. Ako bude kvalitatívne vyzeráť povrch v oboch prípadoch?
- Pri riešení diferenciálnych rovníc nesmieme zabudnúť na tzv. okrajové podmienky: hodnoty riešenia na okrajoch domény. Napíšte ich. Viete tieto podmienky implementovať do vášho riešenia? Následne sformujte približný model, ktorý bude popisovať prúdenie kvapaliny, ktorú roztočíme v pohári. Dbajte hlavne na to, aby kvalitatívne povrch sedel s videom. ²
- Zistite, do ktorého bodu sa naozaj skonzentruje najviac svetla, ak vieme, že inflexný bod povrchu vody je vzdialený a od osi pohára.

²Stačí nám hľadať kvázistabilné riešenie, t.j. približné riešenie, ktoré platí len po krátky čas (ak by sme čakali dlhšie, viskozita by pohyb kvapaliny zastavila úplne).