Zadania 2. série zimnej časti

Termín odoslania 11. 01. 2016

1. Zase raz monopóly... počkať!

Togo si z drôtu vytvaroval kruhový vodič, ktorý umiestnil do roviny xy. Pozdĺž osi z nechal pohybovať sa magnetický dipól s dipólovým momentom $\vec{m}$ konštantnou rýchlosťou $\vec{v}$.

Vypočítajte indukované napätie vo vodiči v dvoch prípadoch:

a) Vektor magnetického momentu smeruje pozdĺž osi z.

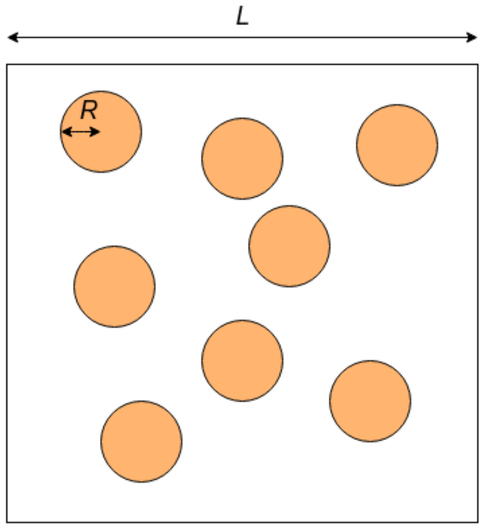
b) Vektor magnetického momentu smeruje kolmo na os z.

Zopakujte rovnaký výpočet pre magnetický monopól. Zakreslite do grafu všetky tri závislosti a navrhnite spôsob, ako by sa dala experimentálne detegovať existencia magnetického monopólu.

2. Kondenzácia tuhých gulí

Predstavme si krabicu, pre jednoduchosť dvojrozmernú. V nej majme tuhé disky, ktoré sa pohybujú ako molekuly plynu – vždy keď na seba narazia, pružne sa od seba odrazia, inak si voľne cestujú po krabici.

Intuitívne sa takéto disky, ak ich je len málo, správajú ako plyn (takýto systém sa nazýva *plyn tuhých sfér*). Ak však zvýšime hustotu diskov, začnú sa diať veci nevídané – až tak, že komunita chemikov sa v 50. rokoch nevedela dohodnúť, čo presne, a tak sa na jednom kongrese rozhodla ustanoviť pravdu hlasovaním. To bolo však ešte pred príchodom počítačov. Dnes má každý z nás k dispozícii výkonné stroje, takže si tento problém vieme vyriešiť sami.



Obrázok 1: *Plyn tuhých sfér*

Pri určitej kritickej hustote sa plyn tuhých diskov začne správať kvalitatívne inak – skondenzuje. Čo to presne znamená a pri akej hustote sa to udeje?

Numericky nasimulujte[1] systém pružne sa zrážajúcich diskov v krabici (so stenami, alebo ideálne periodickými okrajovými podmienkami) s určenou hustotou (definovanou ako podiel plochy zaberanej N diskami o polomere R v krabici so stenou dĺžky L, teda $\rho = N\pi R^2/L^2$). Pomocou vykresľovania grafov polôh diskov možno prísť na to, ako sa takýto systém správa v závislosti od hustoty. Rozmyslite si, ako možno fyzikálne vyjadriť (kvantifikovať) „kondenzáciu“.

Ako na to

Simulácia sa skladá z nasledujúcich krokov:

a) **Inicializácia**: Vyberte veľkosť krabice L, polomer diskov R. Náhodne umiestnite disky do krabice tak, aby sa neprekrývali (nie vždy to vyjde na prvýkrát). Potom každému disku udeľte rýchlosť na základe gaussovského rozdelenia s hodnotami $\mu = 0$ a $\sigma = T$, teda rozumne zvolenou teplotou.

b) **Časový vývoj**: Vymyslite, ako navzájom disky pružne zrážať. Uistite sa, že to celé fyzikálne dáva zmysel!

c) **Vyhodnotenie dát**: Pre každý časový krok zaznamenajte polohu diskov s časom, na základe ktorej možno spočítať priemernú polohu jedného disku a rozptyl (odchýlku). Ako budete postupne zvyšovať hustotu diskov, pri prekročení určitej kritickej hodnoty sa rozptyl spriemerovaný cez všetky disky výrazne zmení. Čo presne sa stane a pri ktorej hodnote to nastane? Ako výsledok simulácie vykreslite závislosť rozptylu od hustoty.

Na Coursere je vynikajúci kurz Štatistickej mechaniky od Wernera Krautha. Odporúčame vám pozrieť si prvé dve-tri časti na zoznámenie sa s problematikou. V prípade nejasností neváhajte napísať na `fx@fks.sk`.

3. Asteroid a jadro

Táto úloha je o deformovaní telies zložených z izotropného materiálu (t.j. takého, ktorého vlastnosti sú vo všetkých smeroch rovnaké). Keďže potrebné znalosti fyziky sú nad rámec stredoškolských osnov, uvádzame aj stručný sumár potrebnej teórie a niekoľko predúloh na precvičenie používaných konceptov. Tá ťažká a naozaj zaujímavá úloha je predmetom častí (c) a (d) zadania. Ako doplnok odporúčame aj 38. kapitolu druhého dielu Feynmanových prednášok z fyziky.

Makroskopické teleso možno deformovať, pričom sa jeho časť umiestnená v nedeformovanom stave v mieste $\mathbf{r}$ presunie vplyvom deformácie do bodu $\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$. Deformácia je tak úplne určená vektorovým poľom $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Pre jej určenie v danom fyzikálnom probléme je však obvykle výhodné prejsť k tenzoru deformácie a tenzoru napätia.

Tenzor deformácie ε_{ij} je symetrický tenzor *definovaný* ako

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\mathbf{r})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{r})}{\partial x_i}\right), \tag{1}$$

kde x_i sú zložky polohového vektora $\mathbf{r}$. Diagonálne členy $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ zodpovedajú lokálnemu relatívnemu predĺženiu v smere osí x, y, z a mimodiagonálne členy $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ a $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$ zodpovedajú sklzným deformáciám v rovinách xy, xz a yz, ktoré pre malé deformácie nevedú k zmene objemu. Lokálna kompresia materiálu sa dá pre dostatočne malé deformácie určiť ako

$$\frac{\Delta V}{V} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \equiv \kappa. \tag{2}$$

[1] Vo svojom obľúbenom jazyku, my odporúčame Python alebo niečo podobne príjemné.

Deformácia daného telesa je sprevádzaná existenciou vnútorného napätia, ktoré sa prejavuje v podobe síl pôsobiacich na povrch myslených objemových elementov. Ak uvážime kúsok vnútra telesa v tvare kocky so stranou da s hranami orientovanými v smere osí x, y, z, tak zložka tenzora napätia σ_{ij} je definovaná ako j-ta zložka povrchovej sily pôsobiacej na stenu kocky kolmú na i-tu os, vydelená plochou steny da^2.

Tieto sily možno chápať ako spôsobené susednými objemovými elementami. Z rovnováhy momentov síl pôsobiacich na skúmanú kocku vyplýva symetria tenzora napätia $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Nenulový tenzor napätia môže byť dôsledkom síl pôsobiacich na povrch skúmeného telesa, alebo dôsledkom kompenzácie objemových síl ako napríklad gravitácie alebo odstredivej sily.

Pre malé deformácie je závislosť medzi tenzorom napätia (podnet) a tenzorom deformácie (dôsledok) *lineárna* a nazýva sa Hookov zákon. Zatiaľ čo pre veľmi anizotropné kryštalické materiály môže byť potrebných na úplný popis elastických vlastností až 21 elastických konštánt, pre izotropné médium stačia dve. Častou voľbou sú tzv. Lamého koeficienty λ, μ, pomocou ktorých

$$\sigma_{ij} = \lambda\kappa\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{3}$$

kde κ je lokálna kompresia definovaná vyššie a $\delta_{ij} = 1$ pre $i = j$ a 0 pre $i \neq j$ je tzv. Kroneckerov symbol. Inverznou rovnicou je

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\delta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}\right). \tag{4}$$

V súradniciach, v ktorých sú oba tenzory diagonálne, možno skrátene písať $\varepsilon_{ii} \equiv \varepsilon_i$ a $\sigma_{ii} \equiv \sigma_i$. V takých súradniciach zodpovedá deformácia zloženej kompresii v smeroch x, y a z a nedochádza k žiadnej sklznej deformácii ani sklznému napätiu. Vtedy možno Hookov zákon zjednodušiť na

$$\sigma_i = \lambda\kappa + 2\mu\varepsilon_i \tag{5}$$

a inverznú rovnicu

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2\mu}\sigma_i - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\left(\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\right). \tag{6}$$

Pre lepšie pochopenie používaných konceptov najprv vyriešte nasledovné dve jednoduché úlohy:

a) Uvažujte voľný hranol dĺžky L so základňou tvaru štvorca so stranou a, ktorý je naťahovaný silou F. Vplyvom pôsobiacej sily sa hranol predĺži o ΔL a stenčí o Δa. Závislosť medzi relatívnym predĺžením $\varepsilon_z = \Delta L/L$, relatívnym zúžením $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\Delta a/a$ a napätím v ťahu $\sigma_z = F/S$ je lineárna

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z = -\frac{1}{\nu}\varepsilon_x = -\frac{1}{\nu}\varepsilon_y, \tag{7}$$

kde E sa nazýva Youngov modul a ν Poissonov pomer. Vyjadrite elastické konštanty E, ν pomocou Lamého koeficientov λ, μ.

b) Uvažujte hranol rovnakých rozmerov, ktorý je vstavaný do veľmi pevnej steny a nemôže meniť priečne rozmery. Inými slovami, stena pôsobí na bočné steny hranola takými napätiami v ťahu $\sigma_x = \sigma_y$, aby priečna deformácia $\varepsilon_x = 0 = \varepsilon_y$. Nájdite závislosť medzi relatívnym predlžením ε_z a napätím v ťahu σ_z v takomto prípade.

Napokon sa dostávame k tej naozajstnej úlohe:

c) Uvažujte asteroid, ktorý má v nedeformovanom tvare (vo vesmíre bez gravitácie) tvar gule s polomerom R a hustotou ρ. Potom magickým kolieskom zvýšime hodnotu gravitačnej konštanty z nulovej hodnoty na G. Určte zmenu polomeru asteroidu ΔR v dôsledku gravitačnej interakcie so sebou samým. Pri výpočte môžete predpokladať, že ΔR je dostatočne malé v porovnaní R.

Hint: Odvoďte, že kvôli guľovej symetrii problému $\varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r}$ *a pre zložky rovnobežné s povrchom* $\varepsilon_x = \varepsilon_y = u_r$. *Pre radiálne posunutie* u_r *by vám mala vyjsť diferenciálna rovnica*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 u_r(r)\right)\right] = \frac{4\pi G\rho_0^2 r}{3(2\mu+\lambda)}. \tag{8}$$

Výsledok pre ΔR vyjadrite pomocou dvojice Lamého koeficientov λ, μ ako aj pomocou dvojice elastických konštánt E, ν.

d) O koľko sa v dôsledku tejto deformácie asteroid zohreje, pokiaľ je merná tepelná kapacita asteroidu (na jednotku hmotnosti) c? Vypočítajte výslednú teplotu pre parametre Zeme a výsledok porovnajte so súčasnou teplotou v zemskom jadre!

Poznámka: Deformácia pre Zem vyjde príliš veľká, teda v praxi sa už na jej opis lineárna elastická teória nevzťahuje. Situáciu tiež komplikuje jej nehomogénne zloženie a kvapalnosť vonkajšieho jadra. Rádová veľkosť výsledku je však napriek týmto problémom zmysluplná a jeho hodnota zaujímavá.