Fyzikálny korešpondenčný seminár, kategória FX
XIV. ročník, 2018/2019
FX, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 27. 01. 2019

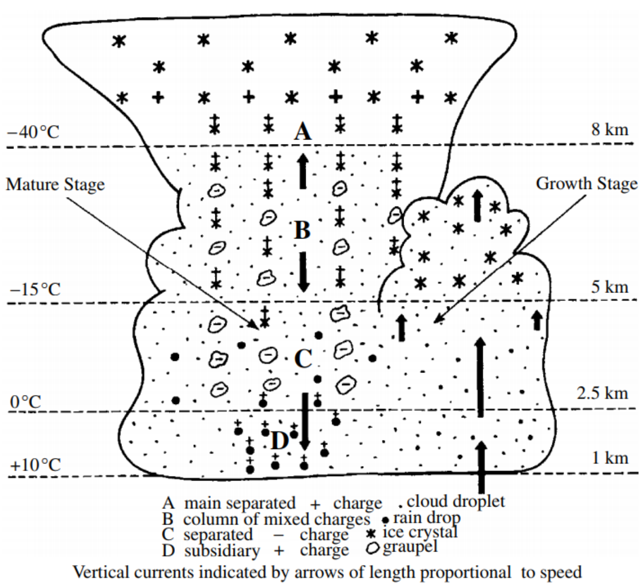
1.1 Kvapka

Predpokladajme, že oblak pozostáva z malých (guľatých) kvapiek vody, ktoré sú v priestore rovnomerne rozmiestnené a v pokoji. Jedna kvapka sa zrazu utrhne a začne padať cez takýto oblak a pri každej zrážke s inou kvapkou sa zväčší o jej objem.

- Ukážte, že zrýchlenie padajúcej kvapky je konštantné a určte jeho hodnotu.
- Vypočítajte, ako dlho by musela kvapka padať, aby sa ohriala na teplotu $T_1 = 25$ °C, ak sa teplota kvapiek v oblaku pohybuje okolo $T_0 = 0$ °C.

1.2 Mračná a blesky

V tom príklade sa pokúsime odhadnúť ako súvisí množstvo zrážok, ktoré spadne na povrch Zeme s rýchlosťou ako sa nabíja oblak voči Zemi, a teda ako dlho potrvá kým udrie blesk. Teda to bude vašou úlohou :) Na priloženom obrázku môžete zhruba vidieť aké častice sa nachádzajú na rôznych miestach búrkového mračna. K hromadeniu náboja dochádza preto, lebo sa padajúce kvapôčky vody trú o častice ľadu a malé ľadovce (tzv. *hail pelets* a *grapels*), ktoré si môžeme pre jednoduchosť predstaviť ako dokonalé gule. V dôsledku tohoto procesu dochádza mechanickým spôsobom k indukovaniu elektrického náboja, vďaka čomu sa v oblaku po čase vytvorí kritické elektrické pole, v ktorom začnú ióny vo vzduchu viesť elektrický prúd.



Obrázok 1: *Častice v búrkovom mračne.*

Ľadovú guľu vo vonkajšom elektrickom poli E si môžeme predstaviť ako dokonale vodivú guľu, ktorá sa dodatočne polarizuje pod vplyvom elektrického poľa tak, že jej horná polovica je kladne nabitá a dolná polovica nabitá záporne. Ak sa ľadová čiastočka nabila na elektrický náboj $-Q_R$, tak celkový náboj q_r, ktorý sa prenesie pri styku ľadovca a kvapiek vody na kvapku vody s polomerom r je

$$q_r = \left(\frac{\pi}{2}E\varepsilon_0\cos\theta + \frac{\pi^2}{6}\frac{Q_R}{R^2}\right)r^2$$

.

Rýchlosť nabíjania ľadovcov v oblaku ($\mathrm{d}Q_R/dt$) je úmerná koncentrácii kvapiek vody n_r, prenesenému náboju pri jednej zrážke q_r, rýchlosti padajúceho ľadovca V_R efektívnej relatívnej ploche $\sigma = 0.74$, ktorú vidia kvapky narážajúce do ľadovca pod uhlom θ meraného od „pólu" ľadovca $\alpha\pi R^2 = \frac{2r}{R}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\pi R^2 \approx 0.017$, pre realistické hodnoty polomeru kvapiek a ľadovca.

- Ukážte, že pre rýchlosť nabíjania platí z predchádzajúcej úvahy nasledujúca rovnica a vyriešte túto rovnicu pre $Q_R(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}Q_r}{\mathrm{d}t} = -\sigma\alpha\pi R^2 V_R n_r q_r$$

V zvyšnej časti riešenia môžete predpokladať, že časová konštanta, ktorá sa objavila v riešení tejto rovnice je rovná $\tau = \left(\frac{\pi^3}{6}\sigma V_R n_r \alpha r^2\right)^{-1} \approx 150\,\mathrm{s}$. Význam tejto konštanty udáva časovú škálu, na ktorej dochádza k nabíjaniu ľadovcov v mračne.

Nárast elektrického poľa v mračne je potom úmerný koncentrácii ľadovcov, ich rýchlosti pádu V_R, a náboja Q_R sčítaného cez ľadovce všetkých možných polomerov R,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -4\pi\int_R \mathrm{d}R N_R Q_R V_R.$$

Naproti tomu je množstvo zrážok p, ktoré dopadne za jednotku času úmerné

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int_R \mathrm{d}R\frac{4}{3}\pi R^3 N_R \rho_i V_R.$$

- Jednoduchou argumentáciou ukážte, že tieto vzťahy sú dobre motivované. Využitím všetkých rovníc a predpokladu, realistického nárastu množstva zrážok na začiatku búrky k maximálnej hodnote $30\,\mathrm{mmh^{-1}}$ za čas 10 minút,
$$p(t) = 30\left(1 - e^{-t/600}\,\mathrm{mmh^{-1}}\right),$$
nájdite čas, za ktorý udrie blesk po začatí búrky t.j. elektrické pole v oblaku dosiahne medznú hodnotu $E = 4270\,\mathrm{V\,cm^{-1}}$ (tzv. prierazné napätie), pri ktorej sa stáva vzduch elektricky vodivým v dôsledku ionizácie. „Pokojové" elektrické pole Zeme má hodnotu približne $E_0 = 5\,\mathrm{V\,cm^{-1}}$.

1.3 Mesiac a Zem

Lega naposledy zaujala otázka, ako dlho by trvalo kým by Mesiac padol na Zem, ak by zrazu prestal Mesiac rotovať okolo Zeme.

- Pokúste sa odhadnúť tento čas za predpokladu, že Mesiac vzhľadom na Zem na začiatku stojí. *Na dopočítanie odhadu pokojne použite počítač.*

Máte? Po chvíli prišiel k Legovi Maťo a povedal si, že tu nebudeme rátať žiadne zjednodušené prípady ako vo filme „Drtivý dopad" a všetko si to pekne zrátame podľa všeobecnej teórie relativity. Teda no, aspoň trošku podľa nej. Stačí, ak sa obmedzíme na výsledok, ktorý nám teória relativity prináša pre výkon vyžarovania gravitačných vĺn. Vo všeobecnej teórii relativity platí, že dve telesá s hmotnosťami M_1 a M_2 obiehajúce okolo vzájomného hmotného stredu rýchlosťou ω vo vzdialenosti r vyžarujú výkon P (vo forme gravitačných vĺn),

$$P = \frac{32}{5}\frac{Gr^4\omega^6}{c^5}\left(\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\right)^2,$$

kde G je gravitačná konštanta a c je rýchlosť svetla.

- Využijúc tejto znalosti skúste znovu odhadnúť ako dlho bude trvať, kým Mesiac padne na Zem v dôsledku vyžarovania gravitačných vĺn, pričom v tomto prípade Mesiac neustále obieha okolo Zeme, no sústavne sa približuje. Dostali ste podobné alebo odlišné výsledky ako v predchádzajúcom prípade? Prečo?

1.4 Optické stláčanie

Elektrický dipól je sústava dvoch opačných nábojov s nábojmi q a $-q$, medzi ktorými je vzdialenosť d (ktorá sa dá napísať vektorovo $\vec{d}$). Elektrický potenciál tvorený dipólom sa v jeho okolí dá popísať ako

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^2},$$

kde vektor $\vec{p} = q\vec{d}$ je dipólový moment. Hlavné rozdiely poľa elektrického dipólu od poľa jedného náboja sú v tom, že pole dipólu klesá nepriamo úmerne so vzdialenosťou umocnenou na tretiu (teda $E \propto 1/r^3$) a taktiež v tom, že jeho pole nie je radiálne symetrické (pripomína skôr magnetické pole tyčového magnetu).

Ak takýto dipól umiestnime do vonkajšieho elektrického poľa, pôsobí naň sila

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E}.$$

Prečo je však užitočné skúmať pole v okolí dipólu? Ukazuje sa, že pole v okolí ľubovolného rozloženia náboja sa dá napísať ako superpozícia bodového náboja (monopólu), dipólu, a radu ďalších, vyšších multipólov[1], ktoré však v tejto úlohe môžme zanedbať. Celá táto metóda sa volá multipólový rozvoj a matematicky ide len o Taylorov rozvoj funkcie $1/|r-r'|$, ktorá vystupuje vo výpočte potenciálu. [2]

Ako sa s tým presne ráta? Pole v okolí istého rozloženia náboja je dané ako superpozícia monopólu, dipólu a zvyšných multipólov, ktoré zanedbáme:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\underbrace{\frac{Q}{r}}_{\text{monopól}} + \underbrace{\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}_{\text{dipól}} + \underbrace{\mathcal{O}(1/r^3)}_{\text{vyššie multipóly}}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

[1] Po dipóle nasleduje tzv. kvadrupól, ktorý sa dá predstaviť ako dva dipóly smerované opačne.

[2] Potenciál tvorený viacerými nábojmi umiestnenými v polohách r_i' sa počíta superpozíciou jednotlivých potenciálov, čo v prípade spojitého rozloženia náboja prejde na integrál:

$$V(r) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i'|} \to \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')\mathrm{d}r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

ktorý obsahuje spomínanú funkciu $1/|r-r'|$.

pričom použitím presného odvodenia (cez spomínaný Taylorov rad) sa dajú získať aj vzťahy pre efektívny náboj a efektívny dipólový moment sústavy:

$$Q = \int \mathrm{d}q = \int \vec{\rho}\,(r), \mathrm{d}V = \text{celkový náboj.} \tag{1.4.1}$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}, \mathrm{d}q = \int \vec{r}\rho(r), \mathrm{d}V \tag{1.4.2}$$

- Tánička zobrala svoju nevodivú kúzelnícku paličku s dĺžkou L a zanedbateľným prierezom. Na jednu polovicu naniesla rovnomerne náboj Q a na druhú náboj $-Q$. Aké pole bude cítiť Maťo vzdialený od nej vo vzdialenosti $D \gg L$ kolmo na paličku? Aký smer bude mať intenzita elektrického poľa? Pri výpočte použite spomínaný multipólový rozvoj.
- Určite si môžete všimnúť, že vzťah pre dipólový moment nie je vo všeobecnosti invariantný voči posunutiu súradnicovej sústavy. Aká je podmienka na to aby bol invariantný? Ak nie je invariantný, znamená to, že potenciál v okolí takého rozloženia nábojov nie je jednoznačne definovaný? Vysvetlite kde nastal problém.

Dipóly sú užitočne, aj keď uvažujeme pole dielektrika v externom elektrickom poli, ktoré vzniká indukovaným nábojom. Tento jav sa volá polarizácia a je dôvodom toho, prečo vnútri dielektrika je elektrická intenzita spravidla slabšia ako vo vákuu. Indukovaný náboj však mení aj pole v okolí dielektrika a zároveň kvôli nemu môže na dielektrikum pôsobiť elektrická sila. V relatívne jednoduchom modeli sa na indukovaný náboj dá pozerať ako jeden dipól[3].

Predstavme si, že do monochromatického svetelného lúča umiestnime sférickú dielektrickú čiastočku. Polomer čiastočky je oveľa menší než je vlnová dĺžka svetla. Vplyvom elektrického poľa sa čiastočka polarizuje a bude sa správať ako elektrický dipól s dipólovým momentom daným:

$$\vec{p} = \underbrace{\frac{3\varepsilon_0}{N}\frac{n^2-1}{n^2+2}}_{\alpha}\vec{E} = \alpha\vec{E},$$

kde n je index lomu dielektrického materiálu a N je úmerné počet atómov na jednotkový objem.[4]

- Spočítajte výslednú silu pôsobiacu na takúto sférickú čiastočku, ako funkciu $\vec{E}$, $\vec{B}$ a α.

Hint: *Bude sa vám hodiť vektorová identita* $\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E} = \nabla\left(\frac{1}{2}E^2\right) - \vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)$ *a jedna z Maxwellových rovníc.*

- Pre lúč v ktorom intenzita svetla od vzdialenosti R od stredu závisí ako $I(R) = I_0 + I_1\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$ určte podmienky, pri ktorých bude čiastočka vťahovaná do stredu a spočítajte periódu vlastných kmitov.

1.5 KOH-I-NOOR sa vracia!

Simon si raz z dlhej chvíle nechával kotúľať ceruzku dolu naklonenou rovinou. Všimol si, že pri každom dopade na bočnú stenu ceruzka trochu spomalila. I preblyslo sa mu hlavou:

- Pre aký najmenší sklon roviny sa ceruzka nikdy nezastaví?

[3]Dôvodom je spomínaný multipólový rozvoj: celkový náboj musí byť 0, lebo dielektrikum je nenabité. Kvôli tomu, že sa náboj premiestni však vytvorí nenulový dipólový moment.

[4]Túto rovnicu nájdete pod menom *Lorentz-Lorenz equation* alebo *Clausius–Mossotti relation*. Predpokladáme, že materiál je nemagnetický, na zmeny elektrického poľa reaguje okamžite a má relatívnu permitivitu $\varepsilon_r = n^2$

- Ako ďaleko sa ceruzka dokotúľa od okamihu, keď sa po stole valí rýchlosťou v? (Myslí sa horizontálna zložka rýchlosti tesne pred prvým dopadom hrany na stôl.)

Preskúmajte tento problém a pomôžte Simonovi zodpovedať otázky, ktoré ho trápia. Ceruzka bola tvaru pravidelného šesťbokého hranola s dĺžkou hrany podstavy b a jej moment zotrvačnosti vzhľadom na šesťnásobnú os symetrie je $I = \frac{5}{12}Mb^2$.

1.6 Navigácia sa vracia!

Navigácia GPS pozostáva z najmenej 24 satelitov, ktoré obiehajú okolo Zeme vo vzdialenosti $h = 26\,600$ km od jej stredu rýchlosťou $v \sim 3{,}9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Všetky satelity si so sebou nesú atómové hodiny a sú vzájomne zosynchronizované. V istých časových intervaloch satelity simultánne vysielajú signál, ktorý obsahuje informáciu o ich orbitálnej polohe a čase vyslania signálu. Využitím tejto informácie z viacerých satelitov dokáže prijímač na Zemi určiť svoju polohu. V tejto úlohe si ukážeme, že na správne fungovanie navigácie je potrebné zahrnúť relativistické korekcie.

Podľa Einsteinovho princípu ekvivalencie je zrýchľujúca vzťažná sústava nerozlíšiteľná od pokojnej sústavy nachádzajúcej sa v homogénnom gravitačnom poli.

- Pomocou výpočtov v zrýchľujúcej sústave ukážte, že čas v gravitačnom poli sa spomaľuje. Konkrétne odvoďte, že v slabom homogénnom gravitačnom poli ($gH << c^2$) platí pre podiel tikania identických hodín vo výškach $h = 0$ a $h = H$

$$\frac{T_H}{T_0} = 1 - \frac{gH}{c^2},$$

kde g je gravitačné zrýchlenie.

Obom hodinám trvá, samozrejme, tiknutie vo svojej vzťažnej sústave rovnako dlho. Rozdiel je pozorovateľný, ak sa na obe hodiny nahliada v jedinej vzťažnej sústave. Dá sa ukázať, že v nehomogénnom gravitačnom poli, napr. radiálnom gravitačnom poli Zeme, sa predošlý vzťah zovšeobecňuje na

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2},$$

kde $\Delta\varphi$ je rozdiel gravitačných potenciálov medzi bodmi 1 a 2.

- Zistite, o koľko sa rozladia atómové hodiny od pozemských v priebehu jedného dňa v dôsledku špeciálnej relativity (obeh hodín okolo Zeme) a v dôsledku gravitačného poľa. Tento problém sa dá vyladiť, ak na orbitu vynesieme atómové hodiny tikajúce pomalšie.
- Odhadnite, aká by bola nepresnosť určenia našej polohy na Zemi po jednom dni od spustenia navigácie, ak by sme atómové hodiny na orbite nevyladili.