Fyzikálny korešpondenčný seminár, kategória FX
XIII. ročník, 2017/2018
FX, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 22. 06. 2017

1.1 Hurikán

Hurikán sa dá modelovať ako termodynamický stroj pracujúci medzi dvoma teplotami (zem a oblaky). Prenášanou látkou je voda, ktorá sa pri zemi najskôr vyparuje do vzduchu. Potom sú tieto čiastočky vodnej pary vynesené hurikánom do výšky, kde je teplota nižšia a voda začína kondenzovať na kondenzačných jadrách. Cyklus sa dá voľne uzavrieť padaním vody na zem v podobe dažďa.

Vašou úlohou je odhadnúť vzťah pre rýchlosť vetrov v hurikáne v ustálenom stave.

Hint: Začnite tým, že si rozmyslíte, o aký stroj ide. Potom zistite, kde mizne výkon tohoto termodynamického stroja, keď je hurikán v ustálenom stave a na základe toho sa pokúste získať rovnicu pre rýchlosť.

1.2 Imaginárne náboje sa vracajú

S metódou imaginárnych nábojov ste sa už mohli stretnúť v elektrostatike. Ak to tak doteraz nebolo, tak to napravíme. Veľmi pekne spísaný úvod nájdete v Zbierke FX na str. 77. Riešenie príkladu v zbierke sa vám zíde aj pri riešení tohto príkladu.

a) Uvažujme bodový náboj $+q$ vo vzdialenosti d od stredu perfektne vodivej a uzemnenej vodivej sféry polomeru a ($d > a$). Ukážte, že imaginárny náboj s veľkosťou $-qa/d$ dokáže nahradiť indukovanú distribúciu náboja na sfére, ak ho umiestnime do vzdialenosti a^2/d od stredu sféry.

b) Umiestnime na opačnú stranu ako predchádzajúci náboj ďalší bodový náboj s veľkosťou $+q$ do vzdialenosti d od stredu sféry, tak, že vzdialenosť medzi nábojmi je $2d$. Napíšte rovnicu dávajúcu do súvisu a a d tak, aby celková pôsobiaca sila na každý náboj bola nulová. Ukážte, že pre $d/a \approx 8$, je táto podmienka približne splnená.

c) Využitím výsledku pre silu pre prípad $d/a = 8$, napíšte vzorec pre silu na jeden zo skutočných nábojov, ak je sféra nabitá na potenciál V.

1.3 Zrážka

Nájdite maximálny uhol θ, o ktorý sa môže odchýliť pohybujúce sa teleso s hmotnosťou M, ak narazí do stojaceho telesa s hmotnostou m, pričom $M > m$.

1.4 Mladí horolezci

Odhadnite, aká je teplota varu vody na Mount Evereste a porovnajte vami vypočítanú hodnotu s nameranou hodnotou varu, $T = 71$ °C. Predpokladajte, že voda zovrie, keď tlak nasýtených pár dosiahne vonkajšieho atmosférického tlaku, a že merné skupenské teplo vyparovania vody L je nezávislé od teploty a rovnaké ako pri $T = 100$ °C, čiže 2,26 MJ/kg.

a) Pomocou adiabatickej atmosféry nájdite vzťah pre hodnotu tlaku vzduchu na Mount Evereste, ak viete, že pri hladine mora dosahuje 101 kPa.

b) Pomocou Clausius-Clapeyronovej rovnice nájdite teplotu varu vody na Mount Evereste. Pri výpočte dajte do rovnosti tlak nasýtených pár vzduchu pri teplote varu vody a tlak vzduchu na Mount Evereste. Využite, že pri atmosférickom tlaku na hladine mora sa voda varí pri 100 °C.

1.5 Xylofón

Vašou úlohu je odvodiť závislosť základnej frekvencie xylofónových doštičiek od ich dĺžky. Základná frekvencia je najnižšia frekvencia, pri ktorej dokáže daná xylofónová doštička kmitať. Pre jednoduchosť budeme predpokladať xylofónové doštičky kvádrovitého tvaru s dĺžkou oveľa väčšou, ako je ich šírka w a výška h. Navyše budeme predpokladať, že všetky doštičky sú zhotovené z rovnakého materiálu so známym Youngovým modulom pružnosti E a hustotou ρ. Na xylofóne je každá doštička uchytená v jednej štvrtine a troch štvrtinách svojej dĺžky. Úchyt je riešený pomocou gumičky, ktorú možno aproximovať voľne otočným čapom. Gravitáciu môžete zanedbať, veď xylofón hrá aj v beztiažovom stave (môžete si to doma overiť).

Hint: Výchylky xylofónu budú priečne vlny, t. j. vlny, ktorých výchylky sú kolmé na smer šírenia. Riešenie pohybovej rovnice, ktoré získate z Eulerovej teórie nosníkov (pozrieť na Wikipédii), je

$$y(x,t) = \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\cos\left(\omega t\right) \text{ pre } x \in \left[-l/2, l/2\right].$$

1.6 Tunelovanie elektrónov

V tomto príklade si vysvetlíme a spočítame kvantové tunelovanie elektrónov, aj keď po prečítaní tejto vety sa vám pravdepodobne dvíha žalúdok, tak vedzte že pravdepodoben zvládnete príklad spočítať a vždy môžete odovzdávať iba čiastočné riešenia. Pomôže nám to lepšie pochopiť zákony mikrosveta a princípy, na ktorom funguje *scanning tunnelling microscope*, stroj na skúmanie tenkých vrstiev materiálov.

Úvod

Najskôr si vysvetlíme, ako vyzerá interakcia vlny s povrchom materiálu. Vieme, že výchylku vlny, napríklad elektromagnetickej alebo aj vlny na hladine vody, možno popísať rovnicou:

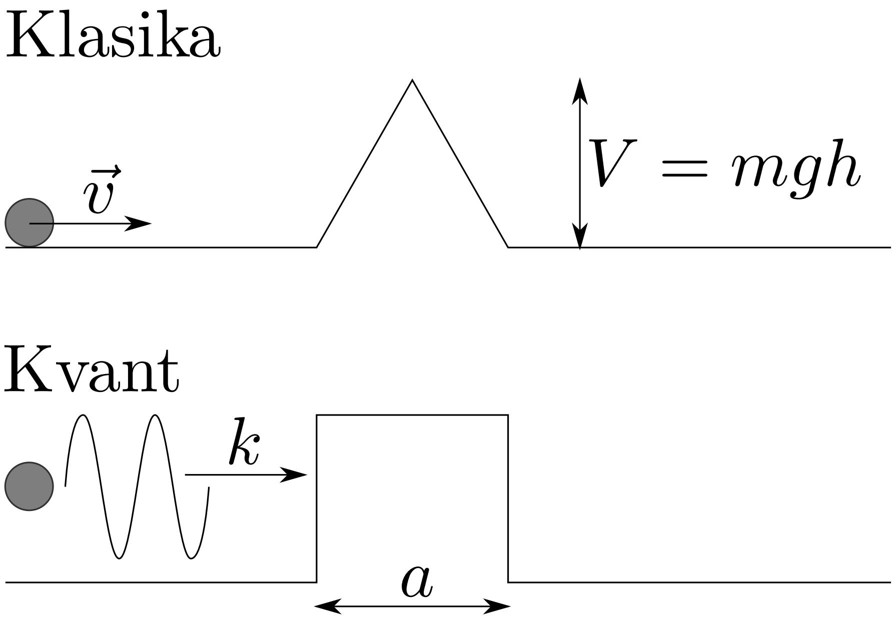
$$\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varphi),$$

kde A je amplitúda (napr. výška alebo intenzita elektrického poľa), φ je fázový posun, ω uhlová frekvencia, $k = 2\pi/\lambda$ tzv. vlnové číslo, ktoré rastie so zmenšujúcou sa vlnovou dĺžkou λ. Vzťah medzi k a ω sa líši od systému, je iný pre vlny na vode, elektromagnetické žiarenie, ako aj pre elementárne žiarenie. Dokonca je iný aj pre rôzne častice v rôznych materiáloch. Efektívne v sebe skrýva informáciu o mechanizme interakcie daného objektu s danou látkou. Napríklad pre svetlo platí $\omega = ck$, kde c je rýchlosť svetla a pre voľné elektróny $\omega = \hbar k^2/(2m)$, kde $\hbar$ je Planckova konštanta a m je hmotnosť elektrónu.

Elektrón ako vlnu popíšeme komplexnou exponenciálou, ktorá je všeobecnejšia ako kosínus. Amplitúdu položíme rovnú jednej a fázu nule, a predpokladáme, že vlna sa šíri smerom doprava:

$$\psi(x) = e^{ikx}.$$

Hybnosť elektrónu je $p = \hbar k$, z čoho vychádza už spomínaná kinetická energia $E = p^2/(2m) = \hbar k^2/(2m)$. Pre elektrón idúci doľava jednoducho otočíme znamienko: $\psi(x) = e^{-ikx}$. Tiež sme vyhodili čas, pretože uvažujeme časovo nepremenný proces, t. j. elektróny pumupujeme nejakým strojom smerom doprava. Produkujeme teda nielen jeden elektrón, ale súvislý a konštantný tok.



Obrázok 1: *Tunelovania cez bariéru.*

Keď takáto vlna narazí na prekážku, ktorej výška (meraná v energii, napr. v gravitačnom poli ako $V = mgh$, viď. **??**) je nižšia ako kinetická energia elektrónu, časť vlny sa odrazí a časť prejde. Podobne, ako keď morská vlna narazí na útes, ktorý je nižší ako výška vlny. No v mikrosvete môže vlna prejsť cez prekážku aj v prípade, keď je energetická bariéra vyššia, odtiaľ výraz *tunelovanie*[1]. Experimenty tento neintuitívny jav podporujú a tu si ukážeme, ako ho možno popísať.

Druhá mocnina vlnovej funkcie je rovná hustote pravdepodobnosti výskytu častice v priestore. Pre rovinnú vlnu platí $|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x) = 1$, a teda nachádza sa všade rovnako, keďže elektróny pumpujeme konštantným tempom).

Náš systém

Majme rovinnú vlnu $\psi(x) = e^{ikx}$, ktorá zľava dopadá na bariéru o šírke a a energetickej výške V_0. Základná vlastnosť vlnovej funkcie je energia, z ktorej môžno odvodiť vlnové číslo ako $k = \frac{\sqrt{2mE}}{h}$.

Naším cieľom je zistiť ako bude vyzerať vlna, ktorá prejde do bariéry, ako aj tá, ktorá vyjde z bariéry. Máme teda tri tvary vlny:

1. naľavo, člen ktorý pumpujeme a odrazený člen s polomerom r:
$$\psi_1(x) = e^{ik_1x} + re^{-ik_1x},$$
2. v bariére:
$$\psi_2(x) = Ae^{ik_2x} + Be^{-ik_2x},$$
3. a napravo, člen, ktorý sa šíri len doprava.
$$\psi_3(x) = te^{ik_1x}.$$

Máme tiež dva predpoklady:

[1] Pre lepšie pochopenie tiež odporúčame tento komiks: http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/scheirich//?attachment_id=73

1. Vlna je na rozhraní spojitá:

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \quad \text{a} \quad \psi_2(x=a) = \psi_3(x=a)\,.$$

2. Nemôže nastať skok v sklone vlny, teda aj prvá derivácia je všade spojitá. V opačnom prípade by vlna mala nekonečnú kinetickú energiu.

$$\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0) \quad \text{a} \quad \psi_2'(x=a) = \psi_3'(x=a)\,.$$

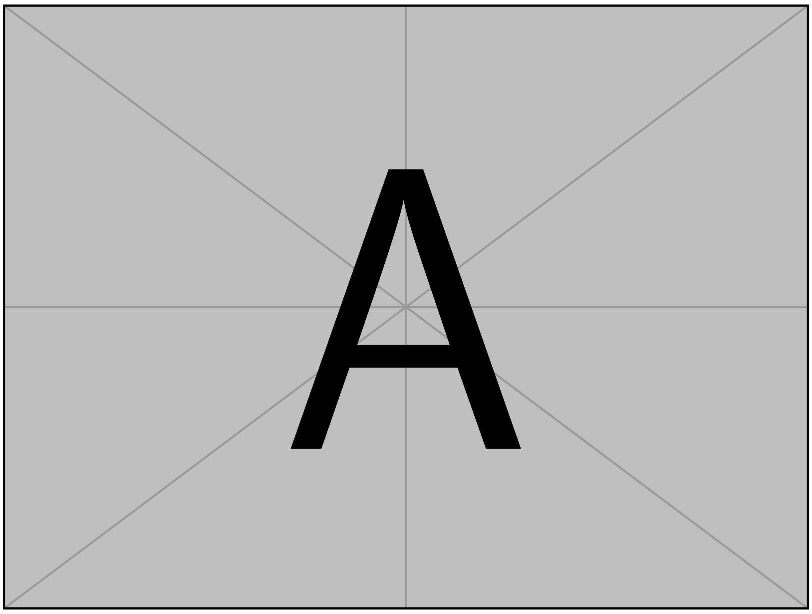
Zadanie

a) Aké je vlnové číslo k_2 pre vlnu vnútri bariéry? Je vždy reálne?

b) Vyriešte štyri rovnice spojitosti vlnovej funkcie a jej derivácie na rozhraniach o štyroch neznámych r, t, A, B. Čomu sa rovná r a t?

c) Veličina $T = |t| = tt^*$ (transmisivita) udáva množstvo elektrónov, ktoré prejdú na druhú stranu bariéry za jednotku času, teda niečo ako prietok. Ako závisí T od energie elektrónov E na začiatku? Nakreslite túto závislosť od $E/V_0 = 0$ po $E/V_0 = 3$. Zvoľte fixnú šírku bariéry $a = 2\pi$.

d) Pre $E > V_0$, ako možno vysvetliť lokálne minimá?



Obrázok 2: *Závislosť pravdepodobnosti tunelovania cez bariéru.*