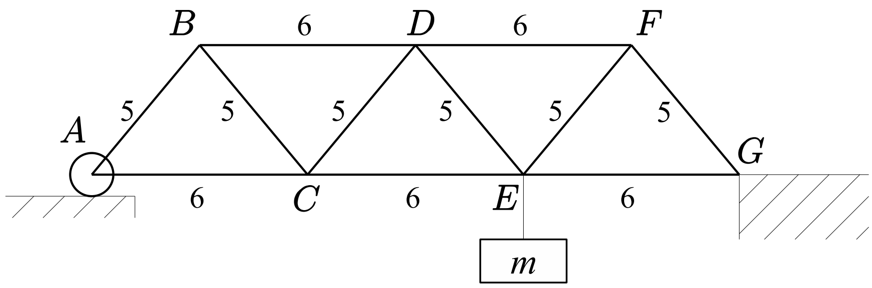
powered by FKS

FX [f:ks]

Vzorové riešenia a výsledky 2. série 4. ročníka

FX4 Most (Opravoval Filip)

Katka si medzi poličkou a stolom postavila most. Most je tvorený ľahkými tyčami voľne spojenými kĺbmi, tak ako na obrázku. Dĺžky šikmých a vodorovných tyčí sú v pomere 5:6. V bode E je zavesené závažie s hmotnosťou m. Ktoré tyčí môže Katka nahradiť ohybnými väzbami, t.j. napríklad pevným špagátom rovnakej dĺžky? Akou silou je namáhaná tyč BD?



Skôr, než sa pustíme do riešenia príkladu, zamyslime sa nad ohybnými väzbami. Tyč sa od ohybnej väzby – napríklad nejakého špagátiku – líši len v tom, že má stály tvar. Ohybná väzba sa môže ľubovoľne krčiť (teda skracovať), no nemôže sa naťahovať. Zjavne teda nič nepokazíme, ak tyče, ktoré sú naťahované, nahradíme špagátikmi. Tyče, ktoré sú stláčané, však nahradiť nemôžeme.[1]

A po tomto zamyslení sa pustime na príklad. Ukážeme si tu tri rôzne postupy. Jeden je priamo cez sily, druhý cez momenty síl a tretí cez energie.

Sily: V prípade, že sa rozhodneme počítať sily, tak si stačí napísať veľa rovníc o veľa neznámych a snažiť sa vyrátať silu F_{BD}. To je dosť nepríjemné. Našťastie môžeme využiť matice. To sa ľahko hovorí, ale ťažšie sa to apikuje v praxi.[2] Čo to za rovnice v nej používame? Jednoduché rovnice zohľadňujúce rovnováhu síl. Pre každý kĺb musí platiť, že výsledná sila naň pôsobiaca je nulová – ináč by sa daný

---

[1] Mohli by sme ich však nahradiť napríklad telesom, ktoré je nestlačiteľné, ale pri rozťahovaní sa rozpadne. Taká veža z drevených kociek je pekným príkladom takéhoto čuda odolného len stlačeniu.

[2] Čo je to tá matica? Je to jednoduchá tabuľka pozostávajúca z m riadkov a n stĺpcov. Každý riadok je vlastne istou formou zapísaná jedna rovnica. Jedenásť riadkov je teda jedenásť rovníc. Koeficienty pri neznámych silách sú zapísané za sebou tak, že každá sila má vlastný stĺpec koeficientov; na konci riadku je napísaná pravá strana rovnice. Ak sa daná neznáma sila v rovnici nevyskytuje, napíšeme do jej stĺpca nulu, teda ako keby tam bola, ale koeficient by bol nulový.

kĺb pohyboval so zrýchlením, čo je v statickej situácii očividne neprípustné. Zapíšeme si teda všetkých 6 rovníc pre horizontálne zložky síl pôsobiace na body A až F (prvých 6 riadkov v matici) a následne aj vertikálne zložky síl pre body B až F tak, že prvý stĺpec zodpovedá koeficientom pri sile F_{AB}, druhý koeficientom sily F_{AC}, tretí F_{BC}, atď. Prečo používame práve tieto rovnice? Prečo nie. Sú pekné, je ich dostatočný počet a hlavne sú lineárne nezávislé[3].

Treba si však uvedomiť pár detailov. Aké sily pôsobia na koncoch mosta? Práve tu je dôležité, že bod A je na koliesku. Hoci tam pôsobí nejaká (zatiaľ neznáma) vertikálna sila, horizontálna zložka musí byť nulová, ináč by sa koliesko hýbalo. Na most pôsobí tiažová sila smerom dole a teda vieme, že aby bola celková výslednica síl pôsobica na most nulová, horizontálna zložka musí byť nulová aj v bode G. Je celkom očividné, že súčet vertikálnych zložiek je rovný tiaži. Keď už máme premyslené rovnice, tak si dajme pozor na znamienka. Zvolíme si smer súradnicových osí a píšeme. Keďže výslednica síl pôsobiacich na tyče musí byť nulová, tyč pôsobí na oboch koncoch opačne orientovanou silou.

A už nám nič nebráni pustiť sa do písania. Toto je teda naša matica, ktorú chceme upraviť. Pre prehľadnosť sme ju vynásobili piatimi (násobením sa nič nepokazí).

$$A = \begin{pmatrix}
3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -5 & -3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 3 & 0 \\
-4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 5mg \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0
\end{pmatrix}$$

Úpravou tejto matice na redukovaný stupňovitý tvar[4] dostávame ma-

[3] O čom sa dá presvedčiť úpravami našej matice alebo zamyslením sa.

[4] Ak to neviete, tak to do vás natlačia na matfyze alebo to vyráta kalkulačka. Takže nezúfajte, existujú aj iné spôsoby k riešeniu tohoto príkladu popísané ďalej.

ticu

$$A = m \cdot g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10/12 \end{pmatrix}$$

Skvelé, máme to, čo sme chceli. Sila $F_{BD} = -\frac{m \cdot g}{2}$. Po toľkej radosti si však prezradíme aj malý problém takéhoto riešenia. Časová zložitosť tohto rátania je $O(n^2)$, čiže pri veľkom moste by sme sa naozaj narátali[5]. Na druhej strane je však veľkým potešením, že po vyriešení matice dostaneme darček zdarma[6] - zoznam tyčí, ktoré môžeme nahradiť špagátikom. Sú to práve tie koeficienty, ktoré vyšli kladné, čo znamená, že ťahajú kĺb k sebe. Sú to tyče AC, BC, CE, DE, EF, EG.

Momenty síl a energie: Tu stačilo ukázať (a zdôvodniť), ktoré palice sú nahraditeľné a následne vypočítať silu pôsobiacu na tyč BD.

Pri zdôvodňovaní využijeme princíp virtuálnych prác. Hoci máme dokonale tuhé paličky, predstavme si, že nie sú spojené pevným kĺbom, ale držia ich malí trpaslíci (niektorí majú tri či dokonca štyri ruky). A teraz si predstavme, že trpaslík rozpaží jednu ruku, čo je veľmi podobné situácii, ako keby sa palička predĺžila o dx[7]. Čo sa stane s energiou sústavy? Principiálne sú možné tri výsledky. Potenciálna energia sústavy sa zväčší, zmenší alebo nezmení. Ak sa potenciálna energia zväčší, trpaslík musí vykonať prácu, a preto môžeme povedať, že palica je stláčaná. Naopak, ak sa potenciálna energia zmenší, trpaslík musí tejto zmene zabraňovať, palica je naťahovaná. To, že by sa potenciálna energia nezmenila, sa nám nestane, ale znamenalo by to, že tu nepôsobí žiadna sila a teda žiadnu tyč ani nepotrebujeme. Aké jednoduché.

Pozrime sa teraz na tyče AC, CE a EG to sú tie na spodnej strane mosta. Ak by sa predĺžila ľubovoľná z nich, most by sa prehol do tvaru

[5] Pravdupovediac, je to práca pre počítač. Mne sa nechcelo rátať ani maticu s jedenástimi riadkami.

[6] Ani nemusia byť Vianoce

[7] Ako to už v rozprávkach býva, trpaslíci sú malí. Neskôr vás naučia, že trpaslík je taký epsilonový.

V. To znamená, že potenciálna energia závažia klesne[8]. Naopak, pri predĺžení tyčí AB, BD, DF, FG sa most prehne naopak. Zostávajú už len uhlopriečky. Ale aj tu sa stačí len trochu zamyslieť. Stačí si len predstaviť, ako sa pomenia uhly, keď sa jedna z nich natiahne a či sa most prehne do tvaru V alebo opačne. Úvahami dospejeme k rovnakým tyčiam, ako keď sme počítali pôsobiace sily.

Keď už sme hotoví s prvou časťou úlohy, poďme vyrátať silu, ktorá stláča tyč BD. S využitím rovnosti momentov síl to ide veľmi rýchlo. Vieme, že súčet síl pôsobiacich od podložky v bodoch A a G musí kompenzovať tiažovú silu telieska a súčasne ich moment síl vzhľadom na E musí byť nulový. Sú to totiž jediné vonkajšie sily pôosobiace na most, ktoré vzhľadom na teliesko spôsobujú nejaké momenty.

$$\begin{aligned} F_g &= F_A + F_G \\ M &= M \\ F_A \cdot 12 &= F_G \cdot 6 \\ F_A &= \frac{F_G}{2} = \frac{F_g}{3} \end{aligned}$$

Zamyslime sa teraz nad časťou mosta ACB a zvoľme si v ňom bod C. Výsledný moment vonkajších síl pôsobiacich na trojuholník vzhľadom na tento bod (ako aj na ľubovoľný iný) musí byť nulový. Vonkajšie sily pôsobiace v C majú moment nulový, zostávajú nám teda iba sily pôsobiace v bodoch A a B. Sila v A smeruje kolmo hore[9] a už sme ju vyrátali. Jediná vonkajšia sila pôsobiaca v bode B je od tyče BD, teda smeruje vodorovne. Áno, je presne tá, ktorú chceme vyrátať. Označme ju F. Výška trojuholníka ABC je 4. Takže dostávame rovnicu:

$$F_A \cdot 6 - F \cdot 4 = 0$$

$$F = \frac{Fg}{2}.$$

V prípade virtuálnych prác budeme postupovať tak, že si predstavíme, čo by sa stalo, keď sa zväčší dĺžka BD o $\mathrm{d}x$. Tým sa nám zmení

[8] Pozor, uvedomme si, že pri nehmotnom moste je hmotné závažie jediná vec, čo nás zaujíma, ale vo všeobecnom prípade by to až také jednoduché nebolo a museli by sme poctivo vyrátať zmenu celkovej potenciálnej energie sústavy.

[9] Bod A je na pohyblivom koliesku a preto ľubovoľná horizontálna sila bude hýbať s kolieskom, až do polohy, v ktorej bude nulová.

aj uhol BCD, označme to ako $\gamma + \mathrm{d}\gamma$. Platí:

$$\begin{aligned}
\sin(\gamma + d\gamma/2) &= \frac{3 + dx/2}{5} \\
\sin(\gamma)\cdot\cos(d\gamma/2) + \cos(\gamma)\cdot\sin(d\gamma/2) &= \frac{3 + dx/2}{5} \\
\frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{4}{5}\cdot d\gamma/2 &= \frac{3 + dx/2}{5} \\
d\gamma &= \frac{dx}{4}.
\end{aligned}$$

Most sa nám v bode C prehne a vznikne trojuholník ACG s výškou $\mathrm{d}h$. Ľahko si všimneme, že uhol pri vrchole C je $\pi - \mathrm{d}\gamma$. Ak označíme uhly pri A ako $\mathrm{d}\alpha$ a pri G ako $\mathrm{d}\beta$, tak vieme, že $\mathrm{d}\gamma = 2\cdot\mathrm{d}\beta$.[10] Súčet uhlov má byť π a preto

$$\mathrm{d}\beta = \frac{\mathrm{d}\gamma}{3} = \frac{\mathrm{d}x}{12}.$$

Odtiaľ už pre zmenu výšky závažia máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= 6\cdot\mathrm{d}\beta \\
\mathrm{d}h &= \tfrac{\mathrm{d}x}{2}.
\end{aligned}$$

A máme výsledok – ak trpaslík rozpaží o $\mathrm{d}x$, potenciálna energia sústavy klesne o $mg\cdot\mathrm{d}x/2$. To znamená, že na dráhe $\mathrm{d}x$ musel musel vykonať zápornú prácu takejto veľkosti a teda tyč BD je stláčaná silou $mg/2$.

FX5 Puding (Opravoval Jakub)

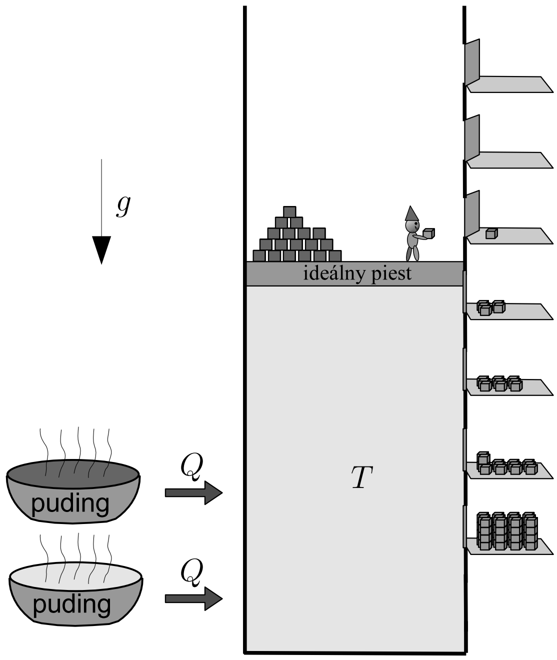
Lenka navarila dva hrnce pudingu: jeden vanilkový a jeden čokoládový. Vanilkový puding má tepelnú kapacitu C_1 (nie mernú, t.j. už v $J.K^{-1}$) a teplotu T_1, čokoládový má kapacitu C_2 a teplotu T_2. Koľko najviac energie vo forme makroskopickej práce z nich vie vyťažiť? (Puding pri tom nezje. Počítajte rýchlo, kým nevychladne!)

Ahojte, ukážeme si dve riešenia. To prvé bude správne, jednoduché a účinné – avšak nepraktické. To druhé bude správne, komplikovanejšie, menej účinné – avšak o mnoho praktickejšie. Pre jednoduchosť (avšak bez ujmy na všeobecnosti) budeme predpokladať, že čokoládový puding nemá vyššiu teplotu ako vanilkový ($T_1 \geq T_2$).

Riešenie 1.

[10] Toto platí iba pre malé uhly alfa a beta, keď je výška $\mathrm{d}h$ trojuholníka ACG veľmi malá.

Zoberme si na pomoc ideálny plyn s N molekulami a teplotou $T < T_2$. Tento plyn zavrime do izolovanej rúry uzatvorenej ideálnym pohyblivým piestom[11]. Dáme ho do tepelného kontaktu s našimi pudingami, avšak tak, aby teplo mohlo prestupovať na chladnejší pracovný plyn iba pomaly, presnejšie povedané tak, aby procesy boli kvázistatické[12]. Ďalej pomocou značkovej elektroniky budem kontrolovať pohyb piestu tak, aby sa teplota plynu nemenila. Jedno z možných využití je aplikácia ako výťahu.



V takomto usporiadaní zjavne plynu dodám celkové teplo $Q = C_1(T_1 - T) + C_2(T_2 - T)$ a toto všetko som očividne[13] využil na vyzdvihnutie kvádrikov[14] v tiažovom poli.

Čím nižšia bude teplota pracovného plynu, tým viac práce výťah vykoná. Limitne pre $T \to 0$ viem ochladením pudingov vykonať mechanickú prácu o veľkosti $W = C_1T_1 + C_2T_2$.[15] Nepraktičnosť tohoto výťahu je v tom, že pracuje neperiodicky – čiže ho po použití nie je

[11] Ideálny pohyblivý piest sa pohybuje bez trenia a nemá žiadnu hmotnosť. Ako sa obvykle pri kvalitnom tovare stáva, vo väčšine obchodných reťazcov je tento artikel už dávno vypredaný.

[12] Kvázistatické procesy sú také, pri ktorých sa zúčastnené telesá nachádzajú stále v rovnováhe. To sa dá zabezpečiť pomalosťou zmien vzhľadom na relaxačnú dobu – dobu potrebnú na ustanovenie rovnováhy. Špeciálne potom pre ideálny plyn pri takomto deji platí stavová rovnica v ľubovoľnom okamihu.

[13] Trpaslík *Tlačič* dbá o to, aby dej plynu bol izotermický. V súlade s tým vyhadzuje na jednotlivých poschodiach kvádriky, aby bol tlak v plyne pod piestom vždy $p = \frac{NkT}{V}$. Pri izotermickom deji sa vnútorná energia plynu nemení, takže všetko prijaté teplo sa využije na konanie mechanickej práce.

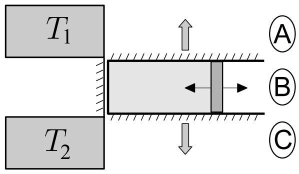
[14] Ťažisko plynu stúpa tiež. To však nevadí, lebo zdvíhanie plynu je mechanická práca. Ak sa nám to napriek tomu nepáči, tak sa to dá ošetriť napríklad tak, že piest dáme do vodorovnej polohy a pomocou dômyselného nehmotného systému lán a kladiek budeme zdvíhať plošinu s trpaslíkom.

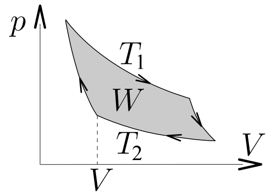
[15] V skutočnosti to tak dobre nepôjde, lebo pri nízkych teplotách sa tepelná kapacita každého telesa blíži k nule, $\lim_{T\to 0} C = 0$, čo je dôsledok 3. vety termodynamickej. Platí to aj pre model ideálneho plynu, u ktorého je známe, že tepelná kapacita je konštantná. Pri nízkych teplotách treba totiž použiť model ideálneho *kvantového* plynu.

hneď možné znovu použiť.

Riešenie 2.

Tentoraz sa obmedzím na periodicky pracujúci stroj. Pomôžem si Carnotovým strojom. Carnotov stroj je cyklicky pracujúci stroj.





Ideálne pracuje s ideálnym plynom, ktorého pracovná schéma pozostáva z 4 kvázistatických fáz:

1. Plyn v polohe A pri teplote T_1 rozpínam. Plyn prijme celkové teplo Q_1.

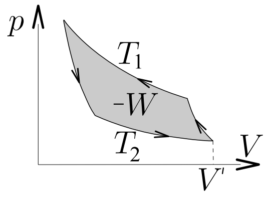
2. Piest presuniem do polohy B a adiabaticky (tepelne izolovane) ho rozpínam až kým nenadobudne teplotu T_2.

3. Piest presuniem do polohy C a pri teplote T_2 ho stláčam až po objem V. Plyn pritom odovzdá celkové teplo Q_2.

4. Piest presuniem do polohy B a adiabaticky ho stláčam až kým nenadobudne teplotu T_1. Potom ho presuniem do polohy A.

Objem V je stanovený tak, aby bol cyklus plynu uzavretý, t.j. tak, aby po dokončení cyklu bol plyn v rovnakom stave ako na začiatku. Nie je ťažké ukázať, že účinnosť takéhoto stroja je $\eta \overset{def}{=} \frac{W}{Q_1} = 1-\frac{T_2}{T_1} = 1-\frac{Q_2}{Q_1}$.[16] Teda ak prijme teplo Q, tak vykoná prácu $W = \eta Q$ a chladiču dodá teplo $Q' = \frac{T_2}{T_1}Q$.

Carnotov stroj však môže pracovať aj pospiatky, v obrátenom režime. Funguje to vďaka tomu, že každú fázu tvorí kvázistatický dej, ktorý môže bežať oboma smermi, podľa toho na ktorú stranu prikážeme trpaslíkovi *Tlačičovi* posúvať (pomaličky) piest. V tomto usporiadaní sa Carnotovmu stroju zvykne hovoriť aj Carnotova chladnička. Nasleduje popis práce tohto stroja:



[16]Ak to čitateľ ešte nikdy nepočítal, tak je najvyšší čas!

1. Plyn v polohe A pri teplote T_1 stláčam. Plyn odovzdá celkové teplo Q_1.

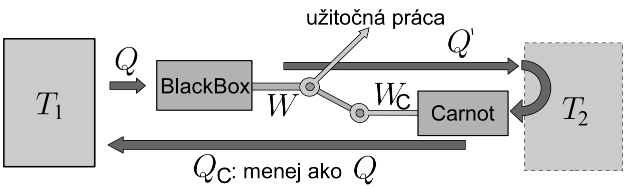
2. Piest presuniem do polohy B a adiabaticky (tepelne izolovane) ho rozpínam až kým nenadobudne teplotu T_2.

3. Piest presuniem do polohy C a pri teplote T_2 ho rozpínam až po objem V'. Plyn pritom prijme celkové teplo Q_2.

4. Piest presuniem do polohy B a adiabaticky ho rozpínam až kým nenadobudne teplotu T_1. Potom ho presuniem do polohy A.

Objem V' opäť stanovený tak, aby bol cyklus plynu uzavretý. V tomto usporiadaní stroj poháňame. Ak teplo, ktoré stroj odoberie chladnejšiemu telesu je Q, tak počas jedného cyklu musíme na ňom vykonať mechanickú prácu o veľkosti $W = (\frac{T_2}{T_1} - 1)Q$. Teplejšie teleso prijme teplo $Q' = \frac{T_1}{T_2}Q$. Na tomto princípe fungujú okrem chladiacich zariadení aj tzv. tepelné pumpy, ktoré teplom Q' vykurujú budovy.

Skutočne dôležitý je však poznatok, že účinnosť ľubovoľného cyklicky pracujúceho stroja nie je vyššia ako účinnosť Carnotovho stroja. Totiž, pripusťme existenciu cyklicky pracujúceho tepelného stroja, ktorý pracuje pri teplotách T_1 a T_2 a má účinnosť η vyššiu ako Carnotov stroj. Budem ho volať BlackBox na znak toho, že pre mňa môže predstavovať čiernu skrinku, o ktorej neviem viac ako to, že to je cyklicky pracujúci tepelný stroj (založený na nejakom mne utajenom princípe). Ak takýto stroj pri jednom cykle odoberie teplejšiemu telesu teplo Q, tak vykoná prácu $W = \eta Q$ a chladiču odovzdá teplo $Q' = (1 - \eta)Q$.[17] Spriahnime teraz tento stroj dokopy s Carnotovou chladničkou, ktorú nastavíme tak, aby chladnejšiemu telesu odoberala pri 1 cykle akurát teplo Q'. Podľa predpokladu o účinnosti bude pri takomto nastavení odovzdávať teplejšiemu telesu teplo Q_C menšie ako Q a bude na pohon potrebovať mechanickú prácu W_C menšiu ako je W.



[17] Tento vzťah vychádza zo zákona zachovania energie. Keďže BlackBox je cyklicky pracujúci stroj, tak jeho stav na konci cyklu je zhodný so stavom na začiatku cyklu a teda jeho energia sa nezmenila. Preto teplo, ktoré počas cyklu prijal musí byť rovné súčtu mechanickej práce, ktorú vykonal, a teplu, ktoře odovzdal chladiču.

Takýto kombinovaný stroj bude vo výsledku konať mechanickú prácu iba ochladzujúc teplejšie teleso.[18] Naša skúsenosť však je, že takýto stroj by sme síce veľmi radi postavili, ale akosi to nejde. Existenciu takéhoto stroja popiera druhá veta termodynamická: Nedá sa zostrojiť perpetuum mobile druhého druhu – t.j. cyklicky pracujúci stroj, ktorý by teplo menil priamo na prácu. Ak jej uveríme, tak sme práve došli k sporu. Totiž, ak by existoval BlackBox, tak viem skonštruovať perpetuum mobile druhého druhu a neplatí druhá veta termodynamická. Jedna z ekvivalentných formulácií druhej vety termodynamickej je však aj tá, že teplo spontánne neprechádza zo studenšieho telesa na teplejšie. A to sa, uznáte, skutočne zdá byť pravda. Nuž, potom treba akceptovať aj to, že BlackBox požadovaných kvalít neexistuje a teda najvyššia možná účinnosť tepelného stroja pracujúceho pri teplotách T_1 a T_2 je práve účinnosť Carnotovho stroja.

Poďme konečne k samotnému riešeniu úlohy. Máme 2 pudingy. Uvažujeme iba cyklicky pracujúce stroje. Zrejme by sme sa mali obmedziť iba na stroje, ktoré po ukončení cyklu vôbec nemenia teploty iných telies ako práve pudingov. Nuž, každý stroj však môžem urobiť ľubovoľne malý a považovať teploty pudingov počas jedného cyklu za kvázikonštantné. No a ja viem, že najvyššiu účinnosť má z takýchto strojov pre každý jeden cyklus práve Carnotov stroj. Carnot počas jedného cyklu s pudingami o teplotách t_1, resp. t_2 odoberie teplejšiemu telesu teplo $\delta Q_1 = C_1 \mathrm{d}t_1$ a chladnejšiemu dodá teplo $\delta Q_2 = \frac{t_2}{t_1}\delta Q_1 = \frac{t_2}{t_1}C_1\mathrm{d}t_1 = -C_2\mathrm{d}t_2$. Odtiaľ mám diferenciálnu rovnicu v separovanom tvare

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} = -\frac{C_2}{C_1}\frac{\mathrm{d}t_2}{t_2},$$

odkiaľ vieme integráciou získať vzťah medzi teplotou T_1' teplejšieho telesa a teplotou T_2' chladnejšieho telesa. Pre jednoduchosť si zavediem označenie $q = \frac{C_2}{C_1}$.

$$\int_{T_1}^{T_1'} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} = -q\int_{T_2}^{T_2'} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2}$$

$$T_2' = \left[\frac{T_1}{T_1'}\,T_2^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Z tohoto vzťahu vieme určiť aj teplotu T, ktorú budú mať oba pudingy

[18] Chladnejšie teleso môže byť značne malé, lebo slúži len na to, aby sa od neho počas každého cyklu dočasne nejaké teplo zobralo a následne vrátilo.

vtedy, keď sa ich teploty vyrovnajú,

$$T = \left[\frac{T_1}{T}\,T_2^q\right]^{\frac{1}{q}} \qquad \Rightarrow \qquad T = [T_2^q T_1]^{\frac{1}{q+1}}\,.$$

Potom je už určenie celkovej práce úplná lahoda

$$\begin{aligned} W &= -\int_{T_1}^{T} \frac{T_1' - T_2'}{T_1'}\, C_1 \, \mathrm{d}T_1' \\ &= C_1 \left[(T_1 - T) + q(T_1 T_2^q)^{\frac{1}{q}}(T_1^{-\frac{1}{q}} - T^{-\frac{1}{q}})\right]. \end{aligned}$$

Do tohoto vzťahu ešte treba dosadiť výrazy za q, resp. T. Konečný vzťah má celkom ďaleko od estetična, tu je

$$W = C_1\left[T_1 - \left(T_1 T_2^{\frac{C_2}{C_1}}\right)^{\frac{C_1}{C_1+C_2}}\right] + C_2 T_2\left[1 - T_1^{\frac{C_1}{C_2}}\left(T_1 T_2^{\frac{C_2}{C_1}}\right)^{-\frac{C_1^2}{C_2(C_1+C_2)}}\right].$$

FX6 Zábavné fotóny (Opravoval Bzdušo a Marián)

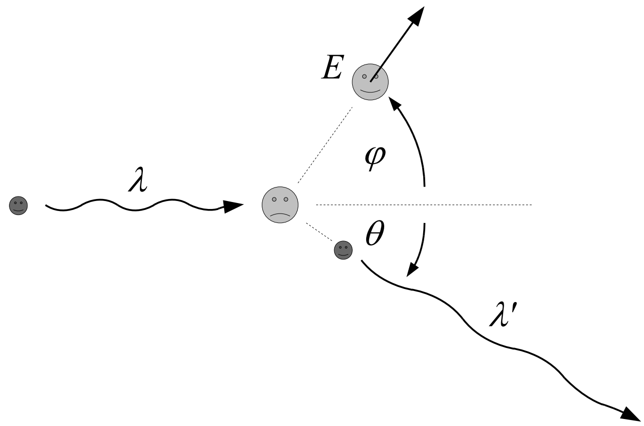
Halucinka našla na povale zopár fotónov vo veľmi dobrej nálade. Jej obľúbený elektrón je už niekoľko dní smutný a nehybne stojí na mieste, rozhodla sa ho teda obveseliť: poslala k nemu usmievavý fotón s vlnovou dĺžkou λ*. S potešením zistila, že po tomto stretnutí sa elektrón predsa len začal pohybovať. Vyslaný fotón sa však pri stretnutí odchýlil od pôvodného smeru o uhol* θ *a zmenil svoju vlnovú dĺžku. Ako závisí nová vlnová dĺžka* λ' *fotónu a kinetická energia* E *elektrónu od uhlu* θ*?*

Do rozbehnutého elektrónu po čase narazil druhý fotón. Po tejto zrážke zostal elektrón znova smutne stáť a fotón sa odchýlil do smeru, v ktorom sa pôvodne pohyboval prvý fotón. Aká je vlnová dĺžka odlietajúceho fotónu?

Nezabudnite, že rýchlosť elektrónu medzi zrážkami môže byť relativistická.

Milé deti. Dnes som si tak sadol k obedu a poriadne si ho vychutnal. Veď bol dobrý. Keď som tak dojedol, prišla na mňa únava a zadriemal som. Snívalo sa mi, že je jar a prechádzam sa rozkvitnutou zelenou lúkou. Steblá trávy sa hompáľali vo vánku. Výhľad na svet naokolo vo mne vzbudzoval pocit opičieho muža… a zrazu ma zabudila mama. Kántri kury motyka!

Úlohu zrejme vyriešime pomocou zákonov zachovania. Zachováva sa nám najmä hybnosť (vo všetkých zložkách), energia avšak tiež elektrický náboj, množstvo domácich úloh a cena tovarov.[19] Naorientujme si celý príbeh do roviny osí x a y tak, nech sa Halucinkou vypustený fotón na začiatku pohyboval v kladnom smere osi x. Spomeňme si, že hybnosť fotónu s vlnovou dĺžkou λ je $p = h/\lambda$, kde h je Planckova koštanta. Jeho energia je c-krát väčšia.



Po zrážke sa fotón odchýli o θ nadol, pričom zmení vlnovú dĺžku na λ'. Aby platil zákon zachovania vo zvislom smere, elektrón musí ísť nejako šikmo nahor. Nech sa pohybuje pod uhlom φ, jeho energia je podľa zadania E. Ak si pozrieme vzťahy pre relativistickú energiu a hybnosť

$$E = \gamma mc^2 \qquad \text{a} \qquad \vec{p} = \gamma m\vec{v},$$

vidíme jednoduchý prepočet $\vec{p} = E\vec{v}/c^2$.[20]

Zákony zachovania (postupne pre p_y, p_x a E) nám dávajú rovnice

$$\begin{aligned} \frac{h}{\lambda'}\sin\theta &= \frac{Ev}{c^2}\sin\varphi \\ \frac{h}{\lambda} &= \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + \frac{Ev}{c^2}\cos\varphi \\ \frac{hc}{\lambda} + mc^2 &= \frac{hc}{\lambda'} + E. \end{aligned}$$

Tieto rovnice sú relativistické, takže nás popis je úplny. Nič nechýba. Všimnime si ale, že v troch rovniciach máme až štyri neznáme:

[19] Meníme menu, nie cenu!

[20] Možno stojí za zmienku, že v celom vzoráku je m pokojová *hmotnosť* a že pre všetky častice (hmotné i nehmotné) platí „relativistická Pytagorova veta“

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

ktorú ochvíľu aj odvodíme. Pre nehmotné častice možno dosadiť $m = 0$. Pre hmotné častice, ktoré sa nepohybujú stačí dosadiť $p = 0$ a dostávame známy Einsteinov vzorec $E = mc^2$.

E, v, φ a λ'. Prvé dve z nich sú však zviazané rovnicou pre relativistickú energiu, takže všetko je v poriadku.

Efektívna cesta k výsledku je napríklad takáto: V druhej rovnici necháme na pravej strane len člen obsahujúci $\cos\varphi$. Porovnáme s rovnicou pre p_y. Vidíme raz sínus, raz kosínus. Iba raz spakruky zatočíme, umocníme na druhú a sčítame. Dostávame rovnicu

$$h^2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\theta+\frac{1}{\lambda'^2}\right)=\frac{E^2v^2}{c^4}.$$

Teraz to chce zasa nejaké vnuknutie zhora. Po kratšom zadívaní sa na rovnice nám napadne vyjadriť si podiel v^2/c^2 zo vzťahy pre relativistickú energiu:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{v^2}{c^2}=1-\frac{m^2c^4}{E^2}$$

Do našej rovnice postrebujeme (vzťah pre E máme zo zákona zachovania energie) poznať

$$\begin{aligned}\frac{E^2v^2}{c^4}&=\frac{E^2}{c^2}-mc^2\\&=\left(\frac{h}{\lambda}-\frac{h}{\lambda'}+mc\right)^2-m^2c^2\\&=\frac{h^2}{\lambda^2}-\frac{2h^2}{\lambda\lambda'}+\frac{h^2}{\lambda'^2}+2mch\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right).\end{aligned}$$

Po dosadení dostávame rovnicu

$$h^2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\theta+\frac{1}{\lambda'^2}\right)=\frac{h^2}{\lambda^2}-\frac{2h^2}{\lambda\lambda'}+\frac{h^2}{\lambda'^2}+2mch\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right).$$

Tu sa nám veľa členov vykráti. Konkrétne, ani nehnem brvou a mám

$$\frac{h}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)=mc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right).$$

Švihnem bičíkom[21] (inými slovami vynásobím $\lambda\lambda'$ a preusporiadam členy) a zrazu

$$\lambda'=\lambda+\frac{h}{mc}(1-\cos\theta).$$

Práve sme odvodil vzťah pre tzv. *Comptonov rozptyl.* Energiu elektrónu už dopočítame jednoduchým dosadením. Po pár šikovných úpravách dostávam

$$E=\frac{h^2c\,(1-\cos\theta)}{\lambda\,(mc\lambda+h\,(1-\cos\theta))}.$$

[21] Aj vy tak zbožňujete kone? Však je to krásne zviera. :-)

Zostáva vyriešiť druhú časť pohybu. Znova platia všetky spomínané zákony zachovania. Avšak, kým sa ponoríme do tajuplného (nie príliš pohostinného) sveta rovníc, skúsme trochu popremýšľať. Predstavme si, že celý proces zachytím na kameru a pustím odzadu.

Vidíme fotón s hľadanou vlnovou dĺžkou ako narazí na stojaci elektrón. Ten sa odchýli o rovnaký uhol a získa rovnakú energiu ako to bolo v predošlom prípade (prvá zrážka a normálny beh času). Na takto pustenej páske ale stále platia zákony zachovania, preto musí mať odletujúci fotón rovnakú veľkú p_y ako odletujúci elektrón (teda aj ako odletujúci fotón pri prvej zrážke a normálnom behu času.) Tieto úvahy nás napokon privádzajú až k tomu, že rozdiel energií prilietajúceho a odletujúceho fotónu je rovnaký ako pri prvej zrážke. To isté by sme zistili aj o zložkách p_x hybnosti. Ak sa nad tým poriadne zamyslíme, tak jediné možné riešenie je, že druhá zrážka, pustená odzadu, je identická s prvou, pustenou odpredu. Vlnová dĺžka odletujúceho fotónu je preto λ.

Avšak, sú to dosť plané reči a chcelo by to aj nejako rigorózne matematicky odôvodniť. To chce ale znova zostaviť podobnú hŕbu rovníc, ako pred chvíľou a búšoť do nich znova. Naučíme sa však niečo nové, aby sme podobné úlohy vedeli riešiť efektívnejšie. Zoznámime sa s takzvanými štvorvektormi.[22]

Štvorvektory

Vieme, že v bežnom (trojrozmernom) priestore existujú veličiny charakterizované trojicou čísel. Tie pri zmene súradnicových osí (napríklad otočenie) menia svoje zložky rovnako ako polohový vektor. To vezmeme ako definíciu vektora. Aby sme sa chápali, typickým príkladom zmeny súradnicových osí je otočenie okolo osi z o uhol α v kladnom smere. Overte si, že platí prepočet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ak je nejaká veličina vektorová, tak sa jej nové zložky spočítajú násobením tou istou maticou.[23] Veď intuícia nám sama vraví, že vektorová veličina je šípka, rovnako tak, ako je aj polohový vektor šípka.

[22] Neľakajte sa. Terminológia je tu podobne jednoduchá a rovnako intuitívna, ako aj v iných vedných odvetviach. Uvážte napríklad slová štvorhlas (hudba), štvorča (medicína), štvorbob (šport), štvorlístok (botanika), štvorhlavý pes (genetická zoológia), poštvornožky (teória umývania dlážky), či štvorhrbolie (teória úpravy cestnej komunikácie).

[23] Pre priaznivcov matematickej analýzy, matica sa nazýva *Jacobiho* a jej zložky sa zrátajú ako parciálne derivácie starých súradníc podľa nových.

V relativite sa všetky veci dejú v štvorrozmernom, tzv. *Minkowského priestore*. Slovo „dejú“ je tu namieste. Prvkami tohoto priestoru sú (z fyzikálneho hľadiska) udalosti charakterizované štvoricou čísel (ct, x, y, z), tzn. miestom a časom.[24] V celom ďalšom texte ich budem označovať veľkými písmenami a budú mať za sebou ešte dolný (alebo horný) index nejaké grécke písmeno. No a aby to nestačilo, skalárny súčin je tu zadefinovaný inak, ako sme zvyknutý. Ak máme štvorvektory $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ a $B_\mu = (B_0, B_1, B_2, B_3)$, tak ich skalárny súčin je (z definície v danom priestore!)

$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_2 B_3.$$

Hornými a dolnými indexami sa netreba nechať zmiasť. Je konvencia že pri skalárnom súčine sa jeden z indexov napíše hore. Jeho zmysel sa poriadne vyjasní až na prednáškach z teórie relativity. Veľkosťou štvorvektora A budeme rozumieť

$$A_\mu A^\mu = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2$$

a vidno že môže byť kladná, záporná i nulová (a to dokonca aj pre štvorvektor s nenulovými zložkami).

Pri prechode k inak natočeným osiam sa musí veľkosť štvorvektora zachovať. My z relativity vieme, že príkladom takejto dobrej zmeny súradníc sú napríklad špeciálne Lorentzove transformácie

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

To je najjednoduhší prípad. Vo všeobecnosti sa transformuje nejakou maticou $\Lambda_{\mu\nu}$. Ak označíme polohový štvorvektor ako R_μ, tak transformácie súradníc možno zapísať ako

$$R'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} R_\nu.$$

Z definície bude štvorvektorom každá taká štvorica čísel, ktorá sa bude transformovať rovnako ako polohový štvorvektor.

Štvorvektor rýchlosti

[24] Rýchlosť svetla pred časom je tam len z rozmerových dôvodov. V relativite sa navyše často stotožňuje jeden meter a jedna sekunda. Prehlási sa, že čas jeden meter je čas, za aký svetlo prejde jeden meter. Potom je $c = 1$ a v rovniciach ho možno úplne vynechať.

Predstavte si, že pohyb nejakého astronauta je zadaný parametricky množinou štvoríc čísel

$$R_\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)),$$

kde τ je jeho vlastný čas, to jest čast ktorý by on nameral na svojich hodinách.[25] Derivujme túto *svetočiaru*[26] podľa vlastného času a nazvime ju štvorrýchlosťou U_μ. To jest

$$U_\mu = \frac{\mathrm{d}R_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \right).$$

Pokúsme sa jej zložky spočítať explicitnejšie. Ak budeme funkcie $x(\tau)$ (a ostatné) chápať ako funkcie $x(t(\tau))$, prejde derivovanie priestorových súradníc na

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}.$$

Ak si ešte spomenieme, že $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(\vec{v})$[27], tak dostávame

$$U_\mu = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z).$$

Všimnite si, že priestorové zložky sú bežná rýchlosť násobená $\gamma(\vec{v})$.[28] Takže ten názov tam asi nebude úplne nadarmo. A ako si overíme, že sa pri zmene súradníc transformuje štvorrýchlosť rovnakou maticou ako štvorvektor polohy? Jednoducho derivujme čiarkovaný štvorvektor a uvidíme:

$$U'_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Lambda_{\mu\nu}R_\nu) = \Lambda_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}R_\nu}{\mathrm{d}\tau} = \Lambda_{\mu\nu}U_\nu$$

Všetko je v poriadku, štvorrýchlosť sa transformuje, ako má. Pri zmene súradníc nezmení svoju veľkosť.

Štvorvektor energie a hybnosti

Definujme štvorhybnosť (celkom intuitívne) ako

$$P_\mu = mU_\mu,$$

kde m je (pokojová) hmotnosť častice, ktorej pohyb opisujeme. Keďže ide o násobenie číslom (skalárny násobok), dostali sme znova štvorvektor. Jeho zložky sú

$$P_\mu = (\gamma mc, \gamma mv_x, \gamma mv_y, \gamma mv_z) = (E/c, p_x, p_y, p_z).$$

[25] Čas t tu má zmysel času na hodinách pevne spojených so zvolenou inerciálnou vzťažnou sústavou, v ktorej pohyb pozorujeme.

[26] Tak sa naozaj volá tá trajektória v štyroch rozmeroch.

[27] Ak si nespomenieme, tak si treba naštudovať nejaký článok o dilatácii času.

[28] Tiež si všimnite, že veľkosť štvorrýchlosti je vždy c^2.

Ľaľa. Energia a hybnosť spolu tvoria štvorvektor! A nielen to! My navyše vieme, že všetky 4 veci v poslednom okienku sú zachovávajúce sa veličiny. To znamená, že aj štvorvektor energie a hybnosti nejakej sústavy je zachovávajúca sa veličina.[29] Keď už sme až tu, spočítajme si veľkosť tohoto štvorvektora. Podľa vyššie definovaných pravidiel musí platiť

$$P_\mu P^\mu = E^2/c^2 - p^2.$$

Veľkosť štvorvektora ale nezávisí od zvolenej vzťažnej sústavy. Napríklad vo vzťažnej sústave, kde teleso stojí, má štvorhybnosť zložky $(mc, 0, 0, 0)$ a veľkosť $P_\mu P^\mu = m^2c^2$. A tak prichádzame k dôležitej rovnici

$$E^2/c^2 = p^2 + m^2c^2.$$

Veľkosť každého štvorvektora hybnosti a energie je teda m^2c^2. Špeciálne si všimnite, že pre častice s nulovou pokojovou hmotnosťou, napr. fotóny, je veľkosť štvorhynbosti nulová.

S novým aparátom späť k úlohe

Do prvej zrážky vchádzajú častice s nejakými štvorhybnosťami a vystupujú s nejakými inými štvorhybnosťami. Zaveďme označenia

- $\rightarrow$ $P^\gamma_{1\,\mu}$ (resp. $P^{\gamma\ \mu}_1$) $= (\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda}, 0, 0)$ pre štvorhybnosť fotónu pred zrážkou,
- $\rightarrow$ $P^{e^-}_{1\,\mu}$ (resp. $P^{e^-\ \mu}_1$) $= (mc, 0, 0, 0)$ pre štvorhybnosť elektrónu pred zrážkou,
- $\rightarrow$ $P^\gamma_{2\,\mu}$ (resp. $P^{\gamma\ \mu}_2$) $= (\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'}\cos\theta, -\frac{h}{\lambda'}\sin\theta, 0)$ pre štvorhybnosť fotónu po zrážke a
- $\rightarrow$ $P^{e^-}_{2\,\mu}$ (resp. $P^{e^-\ \mu}_2$) $= (\frac{E}{c}, \frac{Ev}{c^2}\cos\varphi, \frac{Ev}{c^2}\sin\varphi, 0)$ pre štvorhybnosť elektrónu po zrážke.

To nevyzerá moc pekne, ale až na konvenčné μ by boli označenia rovnako škaredé aj v klasickej mechanike. Zákon zachovania štvorhybnosti sa dá zapísať ako

$$\left(P^\gamma_1 + P^{e^-}_1\right)_\mu = \left(P^\gamma_2 + P^{e^-}_2\right)_\mu$$

Všimnite si, že v $P^{e^-}_{2\,\mu}$ vystupuje veľmi veľa neznámych veličín (E, v a φ). Ale my už vieme z predošlého odstavca, že veľkosť tejto štvorhybnosti je m^2c^2. Ak ponecháme túto štvorhybnosť na ľavej strane

[29] Radosť v tvári, úsmev v očiach. Rovnice treba riešiť s entuziazmom. :-)

rovnice samú a umocníme na druhú, všetky tieto neznáme nám vypadnú! Postupne dostávame:

$$\begin{aligned} \left(P_1^\gamma + P_1^{e^-} - P_2^\gamma\right)_\mu &= \left(P_2^{e^-}\right)_\mu \\ \left(P_1^\gamma + P_1^{e^-} - P_2^\gamma\right)_\mu \left(P_1^\gamma + P_1^{e^-} - P_2^\gamma\right)^\mu &= \left(P_2^{e^-}\right)_\mu \left(P_2^{e^-}\right)^\mu \end{aligned}$$

Vyzerá to hrozivo? Nemôže, je to len mechanické narábanie s výrazmu. Roznásobíme podľa pravidla maximálnej promiskuity.[30] Na pravej strane ostane m^2c^2. Ľavú stránu upravíme na dvakrát, pamätajúc na podivný skalárny súčin:

$$\begin{array}{ccccccc} P^\gamma_{1\,\mu} P_1^{\gamma\ \mu} & + & P^{e^-}_{1\,\mu} P_1^{e^-\,\mu} & + & P^\gamma_{2\,\mu} P_2^{\gamma\ \mu} & + & \\ 2P^\gamma_{1\,\mu} P_1^{e^-\,\mu} & - & 2P^\gamma_{1\,\mu} P_2^{\gamma\ \mu} & - & 2P^{e^-}_{1\,\mu} P_2^{\gamma\ \mu} & = & m^2c^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & + & mc^2 & + & 0 & + & \\ 2\frac{h}{\lambda}mc & - & 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta) & - & 2\frac{h}{\lambda'}mc & = & m^2c^2 \end{array}$$

Síce tam bolo veľa členov, ale ešte viacej núl v zložkách štvorhybností. Celé sa to teda zvrhlo na jednoduché násobenie. Teraz máme v rovnici jedinú neznámu λ'. Po drobných úpravách máme *prakticky bez námahy*[31]

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)\,.$$

Ako bez námahy overíme, aká bude vlnová dlžka odletujúceho fotónu v druhej zrážke? Vchádzajúci fotón so sebou nesie veľa neznámeho - svoju vlnovú dĺžku a uhol, z ktorého prichádza. Veci, ktoré nás vôbec nezaujímajú! Ale vieme, že veľkosť tohoto štvorvektora je nulová.[32] Aby sme mohli zapísať rovncie, zaveďme ešte označenia

- $\rightarrow$ $P^{\gamma *}_{2\,\mu}$ (resp. $P_2^{\gamma *\ \mu}$) $= (\frac{h}{\lambda_1}, \frac{h}{\lambda_1}\cos\psi, -\frac{h}{\lambda_1}\sin\psi, 0)$ pre štvorhybnosť fotónu vchádzajúceho do druhej zrážky,
- $\rightarrow$ $P^{e^-}_{3\,\mu}$ (resp. $P_3^{e^-\,\mu}$) $= (mc, 0, 0, 0)$ pre štvorhybnosť elektrónu po druhej zrážke a
- $\rightarrow$ $P^{\gamma *}_{3\,\mu}$ (resp. $P_3^{\gamma *\ \mu}$) $= (\frac{h}{\lambda_2}, \frac{h}{\lambda_2}, 0, 0)$ pre štvorhybnosť elektrónu vychádzajúceho z druhej zrážky.

[30] Každý s každým.

[31] Celá námaha sa tu zvrháva na pochopenie štvorvektorov. Akonáhle si s nimi potrasieme rukou a pochopíme reči ich kmeňa, môžeme ich používať úplne zadarmo so všetkými výhodami, ktoré prinášajú. Tých je široké spektrum! Informujte sa u najbližšieho dodávateľa!

[32] Častice s nulovou pokojovou hmotnosťou majú

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2c^2 = 0.$$

Zákon zachovnia štvorhybnosti dáva:

$$\begin{aligned}
\left(P_2^{\gamma*} + P_2^{e^-}\right)_\mu &= \left(P_3^{\gamma*} + P_3^{e^-}\right)_\mu \\
\left(P_2^{\gamma*}\right)_\mu &= \left(P_3^{\gamma*} + P_3^{e^-} - +P_2^{e^-}\right)_\mu \\
0 &= \left(P_3^{\gamma*} + P_3^{e^-} - +P_2^{e^-}\right)_\mu \left(P_3^{\gamma*} + P_3^{e^-} - +P_2^{e^-}\right)^\mu \\
0 &= m^2c^2 + 0 + m^2c^2 + 2\frac{h}{\lambda_2}mc - 2mE - 2\frac{h}{\lambda_2}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right)
\end{aligned}$$

Tým istým spôsobom sa môžeme zbaviť odletujúceho fotónu v prvej zrážke a prídeme k rovnici

$$0 = m^2c^2 + 0 + m^2c^2 + 2\frac{h}{\lambda}mc - 2mE - 2\frac{h}{\lambda}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right).$$

Získané dve rovnice majú rovnaké ľavé a teda aj pravé strany. Po vykrátení rovnakých členov v oboch rovniciach a pár úpravách dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{E}{mc^2}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right)\right) &= \frac{1}{\lambda_2}\left(1 - \frac{E}{mc^2}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right)\right) \\
&\Downarrow \\
\lambda &= \lambda_2,
\end{aligned}$$

čo sme chceli ukázať.

Výsledková listina FX po druhej sérii.

#	Riešiteľ	FX1-3	FX4	FX5	FX6	$\sum$
1.	Eugen Hruška	11.5	5	0.5	4	21
2.	Mária Kieferová	10	2	1.5	3	16.5
3.	Ján Bogár	7.5	5	0	2.5	15
4.	Kateřina Honzáková	7	-	-	-	7
5.	Martin Polačko	6	-	-	-	6
6.	Peter Vanya	5.5	-	-	-	5.5
7.	Jakub Kováč	-	0	0	2	2
	Prabhat Pinnaka	2	-	-	-	2
9.	Adam Mohammad	0	-	-	-	0
	Michal Zajaček	0	-	-	-	0