powered by FKS

FX [f:ks]

Vzorové riešenia a výsledky 1. série 4. ročníka

FX1 Zrkadlá (Opravoval Kubus)

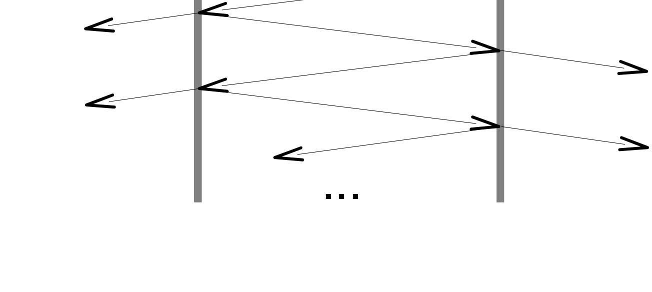
Polopriepustné zrkadlo s priepustnosťou α (kde $0 \leq \alpha \leq 1$) je také zrkadlo, na ktoré ak (z ľubovoľnej strany) zasvietime lúč s intenzitou I, prepustí lúč s intenzitou αI a odrazí lúč s intenzitou $(1-\alpha)I$.

(a) *Filip zobral zrkadlo s priepustnosťou α_1 a hneď zaň postavil rovnobežné zrkadlo s priepustnosťou α_2. Koľko svetla prepustí táto dvojica zrkadiel, ak na ňu spredu zasvietime lúč s intenzitou I? Čo ak zasvietime zozadu?*

(b) *Vlado sa nenechal zahanbiť, vytiahol všetky polopriepustné zrkadlá čo našiel v pivnici, a tiež ich postavil pekne za seba. Jeho zrkadlá majú priepustnosti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, v tomto poradí. Ako sa bude správať táto sústava?*

Tento príklad nebol ťažký, všetko potrebné bolo napísané v zadaní. Bez ďalších prieťahov ho teda vyriešme. Pozrime sa najprv na Filipovu situáciu s dvoma zrkadlami s priepustnosťami α_1 a α_2.

Ak na túto dvojicu zrkadiel zasvietime lúč s intenzitou I, lúč s intenzitou $(1-\alpha_1)I$ sa odrazí naspäť od prvého zrkadla a lúč s intenzitou $\alpha_1 I$ cezeň prejde. Tento lúč ďalej dopadá na druhé zrkadlo, od ktorého sa odrazí lúč s intenzitou $\alpha_1(1-\alpha_2)I$, pričom zvyšných $\alpha_1\alpha_2 I$ prejde na druhú stranu. Ale pozor! Tu príbeh nekončí. Lúč odrazený od druhého zrkadla znova dopadne na prvé, kde sa časť znova odrazí a znova príde k druhému. Kúsok prejde ďalej, ale kúsok prejde znova k prvému a naspäť. Stále slabší a slabší lúč sa bude odrážať medzi zrkadlami, a pri každom odraze z neho kúsok prenikne von.

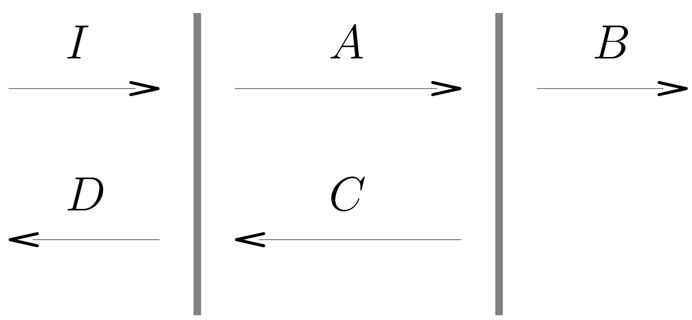


Ako už bolo spomenuté, prvý z lúčov, čo prejde na druhú stranu, bude mať intenzitu $\alpha_1\alpha_2 I$ (musel totiž prejsť cez obe zrkadlá). Ďalší z nich bude mať intenzitu $\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$ (musel prejsť cez prvé zrkadlo, odraziť sa od druhého a prvého, a prejsť cez druhé), ďalší $\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1)^2(1-\alpha_2)^2$ (tento sa od oboch zrkadiel zvnútra odrazil dvakrát), a tak ďalej. Celková intenzita lúča, ktorý prejde na druhú stranu, bude teda

$$\begin{aligned}B &= \alpha_1\alpha_2 I + \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_1)^2(1-\alpha_2)^2 + \dots\\ &= \alpha_1\alpha_2\left(1 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + ((1-\alpha_1)(1-\alpha_2))^2 + \dots\right)\\ &= \alpha_1\alpha_2\frac{1}{1-(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2}.\end{aligned}$$

Posledný riadok sme dostali sčítaním nekonečného geometrického radu v tvare $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$.

Na sčítavaní nekonečného radu samozrejme nie je nič zlé, ukážme si však aj iný, trochu všeobecnejší postup riešenia. Keď na zrkadlá spredu zasvietime lúč I, budú medzi nimi a všelikde naokolo svietiť všelijaké lúče. Nás však nemusí zaujímať každý z nich, len celková intenzita lúčov, ktoré idú každým relevantným smerom. Označme si ako na obrázku intenzitu lúčov od prvého k druhému zrkadlu ako A, od druhého k prvému ako C, od druhého smerom doprava ako B a od prvého naspäť ako D.



Vieme, že každý z lúčov (teda súborov lúčov s danou celkovou intenzitou) I, A a C sa pri dopade na patričné zrkadlo rozdelí presne podľa priepustnosti tohto zrkadla. Keďže sa na zrkadlách žiadne ďalšie svetlo nevyrába, vieme presne vyjadriť, koľko svetla odchádza ktorým smerom z každého zrkadla. Dostávame rovnice

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1 I + (1-\alpha_1)C \\ B &= \alpha_2 A \\ C &= (1-\alpha_2)A \\ D &= (1-\alpha_1)I + \alpha_1 C. \end{aligned}$$

Riešením tejto jednoduchej sústavy rovníc dostaneme rovnaké riešenie ako prvým postupom.

Čo sa stane, ak na zrkadlá zasvietime z druhej strany? Presne to, čo by sa stalo, keby sme vymenili α_1 a α_2. A teda, zhodou okolností, vôbec nič: všimnite si, že vzťah pre intenzitu B je úplne symetrický vzhľadom na výmenu α_1 a α_2.

Zostáva už len vyriešiť otázku, čo sa stane, keď za seba postavíme zrkadiel viac. Napovedá nám k tomu predošlý odstavec. Keďže dvojica zrkadiel s priepustnosťami α_1 a α_2 prepúšťa z oboch strán presne $\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2}$ svetla, správa sa nerozlíšiteľne (čo do prepúšťania svetla) od zrkadla s priepustnosťou $\alpha_{12} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1\alpha_2}$. Ak teda za ne postavíme zrkadlo s priepustnosťou α_3, všetky tri sa budú správať ako zrkadlo s priepustnosťou $\alpha_{123} = \frac{\alpha_{12}\alpha_3}{\alpha_{12}+\alpha_3-\alpha_{12}\alpha_3}$. Postupným pridávaním zrkadiel po jednom by sme takto mohli vypočítať priepustnosť sústavy zloženej z ľubovoľného počtu zrkadiel.

Mohli. Neexistuje však nejaký krajší vzťah pre výslednú priepustnosť? Alebo aspoň *nejaký* vzťah, a nie len algoritmus na jej výpočet?[1] Ak si rozpíšeme vzťahy pre α_{123} a α_{1234} pomocou jednotlivých α_i:

$$\begin{aligned} \alpha_{123} &= \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \\ \alpha_{1234} &= \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \end{aligned}$$

nie je ťažké uhádnuť vzťah pre všeobecných n zrkadiel, a nie je ani oveľa ťažšie dokázať ho matematickou indukciou.

Ukážme si preto trošku iný nadhľad do problému. Všimnime si, že vzťah pre výslednú priepustnosť dvojice zrkadiel vieme prepísať ako

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2}-1\right)+1},$$

čiže

$$\frac{1}{\alpha_{12}} - 1 = \left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2}-1\right).$$

[1] Vŕtavejší z vás sa možno pýtajú, aký je v tom v skutočnosti rozdiel: nie je aj normálny vzorec či vzťah vlastne len postup na výpočet?

Inými slovami, kvantita $\frac{1}{\alpha} - 1$ (čo je vlastne $\frac{1-\alpha}{\alpha}$, teda pomer odrazeného a prepusteného svetla) sa pri skladaní zrkadiel sčítava. Po krátkom zamyslení si overíme, že takéto sčítavanie musí fungovať aj pre sústavu viacerých zrkadiel, celková priepustnosť α Vladovho systému zrkadiel s priepustnosťami $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bude spĺňať vzťah

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1 \right),$$

a teda

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1 \right)}.$$

FX2 Asteroid (Opravoval Jakub)

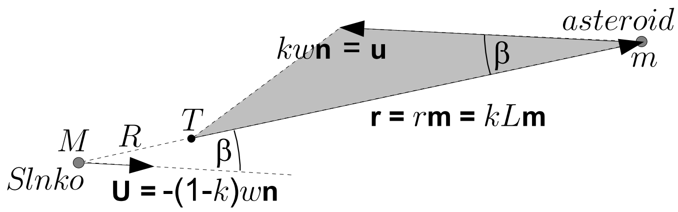
Azag sa hral so svojím novým ďalekohľadom, keď zrazu spozoroval pohybujúci sa asteroid. Azag zistil, že tento asteroid sa práve nachádza vo vzdialenosti d od Slnka, jeho okamžitá rýchlosť je v, a smer jeho rýchlosti zviera uhol α so spojnicou asteroid-Slnko. Aká je jeho perióda obehu okolo Slnka?

Najprv si sformulujem úlohu tak, aby som ju bol schopný vyriešiť. To je základ :-). Ako prvé zabudneme na všetky telesá okrem Slnka a asteroidu. Ďalej sa uspokojíme s nerelativistickým riešením. To by ešte stále mohlo byť ťažké, takže sa uskromníme s popisom Slnka a asteroidu pomocou modelu hmotného bodu. Ako jedinú interakciu medzi Slnkom a asteroidom budem uvažovať newtonovskú gravitáciu (čiže žiaden tlak slnečného žiarenia, je mi ľúto). Celkovo sme situáciu maximálne sprehľadnili za cenu toho, že ignorujeme krásnu otvorenú hviezdokopu Plejády (pred svitaním je ju krásne vidieť) a okrem toho aj plejádu zaujímavých javov spojených s vplyvom okolitých planét (precesia perihélia a iné poruchy dráhy), relativistickými efektami (tiež precesia perihélia; pozorovaná najlepšie na dráhe Merkúru), rotáciou telies (precesia zemskej osi, nutácia), deformovateľnosťou telies (slapové javy: príliv/odliv, spomaľovanie rotácie Zeme) alebo slnečným vetrom (plachtenie kozmickej plachetnice). Vybrali sme si však tak, aby jav (pohyb po trajektórii), ktorý chceme študovať, ostal vcelku nedotknutý ustanovenými zjednušeniami.

Úlohu veľmi efektívne zriešime, ak si spomenieme na Keplerove zákony a zákon zachovania energie (mechanickej, pravdaže). Mali by sme si teda pripomenúť prvé dva Keplerove zákony v ich súčasnom znení, tie sa nám budú hodiť. Platia pre sústavu pozostávajúcu z dvoch hmotných bodov, ktoré na seba pôsobia prostredníctvom potenciálu tvaru $U(r) = -\frac{\kappa}{r}$ kde sa uvažuje $\kappa > 0$.[2]

- Každé z telies sa pohybuje po elipse/parabole/hyperbole[3], v ktorej ohnisku (resp. v jednom z ohnísk) sa nachádza ťažisko sústavy.
- Pre každé z telies platí zákon zachovania momentu hybnosti vzhľadom na ťažisko sústavy. Konkrétne, pre zložku momentu hybnosti kolmú na rovinu pohybu telies[4] dostaneme známu formuláciu o konštantnosti plochy opísanej sprievodičom telesa za jednotku času.

Keďže náš asteroid je zrejme o mnoho ľahší ako Slnko[5], tak ťažisko sústavy je veľmi blízko bodu, do ktorého sme skoncentrovali hmotu Slnka. Inak je počítanie bohatšie o jeden koeficient, avšak neposkytuje bohatší život… To sa hovorí. My sa o tom presvedčíme! Nech teda hmotnosť m je hmotnosť asteroidu a M je hmotnosť Slnka. Riešme problém z ťažiskovej sústavy. Tá je vďaka horeuvedeným predpokladom inerciálna.[6] Kvôli prehľadnosti zavediem konštantu $k = \frac{M}{M+m}$. Potom ak L je vzdialenosť telies od seba, tak vzdialenosť asteroidu od ťažiska sústavy je $r = kL$. Vzdialenosť Slnka od ťažiska sústavy je $R = (1-k)L$. Čitateľ by si mal premyslieť, že v ťažiskovej sústave platia aj vzťahy, ktoré vyčíta z obrázka.



V obrázku sú **n** a **m** jednotkové vektory v smere rýchlostí oboch telies vzhľadom na ťažisko (i navzájom), resp. v smere z ťažiska ku telesám (i v smere relatívnej polohy), w je okamžitá relatívna (vzájomná) rýchlosť telies a uhol β je v zadaní spomínaný uhol, ktorý zviera vektor rýchlosti **u** asteroidu (rýchlosť vzhľadom na ťažisko sústavy T) so sprievodičom. Vektor **U** je rýchlosť Slnka vzhľadom na T. Tu si

[2] Napr. pre gravitáciu podľa Newtona platí $\kappa = GmM$, kde G je gravitačná konštanta a m, M sú hmotnosti oboch telies.

[3] Patologické prípady, keď sa telesá pohybujú iba po priamke k sebe alebo od seba sa dajú chápať ako limitný prípad týchto „slušných“ kužeľosečiek.

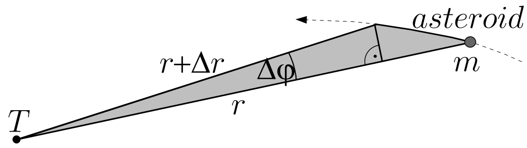
[4] Každý by si mal dôkladne premyslieť, prečo sa celý pohyb dá umiestniť do roviny!

[5] Zvyčajne to tak býva, ale ktohovie, čoho sa ešte dožijeme…

[6] Čiže je v rovnomernom priamočiarom pohybe alebo v pokoji vzhľadom na všetky ostatné inerciálne vzťažné sústavy.

treba premyslieť aj to, že uhlová rýchlosť pohybu oboch telies okolo ich spoločného ťažiska je jedna a tá istá, ω.

Druhý Keplerov zákon nám dá rovnicu $L^2\omega = konst$. Naše tvrdenie podporíme obrázkom



z ktorého vidíme, že plocha opísaná sprievodičom asteroidu (ktorý začína v ťažisku) za čas Δt je rovná $\frac{1}{2}r(r+\Delta r)\sin\Delta\varphi$.[7] Keďže časový interval Δt môžeme voliť ľubovoľne malý, tak aj Δr a $\Delta\varphi$ budú príslušne malé. Potom môžeme plným právom použiť aproximáciu $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Keď sa obmedzíme na členy, ktoré závisia od Δt iba v prvej mocnine[8], tak nám ostane plocha $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$. Teda rýchlosť opisovania[9] plochy sprievodičom asteroidu je $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{r^2\Delta\varphi}{2\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}k^2L^2\omega$. Pričom však na určenie rýchlosti opisovania plochy sprievodičom môžeme s úspechom použiť vektorový súčin (pomôž si prípadne prvým obrázkom), totiž je to $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\Delta t}\left|\mathbf{r}\times(\Delta t\,\mathbf{u})\right| = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}\times\mathbf{u}\right| = \frac{1}{2}k^2Lw\sin\beta$. Porovnaním vzťahov dostávame $L\omega = w\sin\beta$. Hneď teda vidíme, že podmienka (I) $L^2\omega = konst = dv\sin\alpha \overset{ozn.}{=} K$ nám zaručí konštantnosť „opisovania“ na prijateľnej úrovni. :-)

Zákon zachovania (mechanickej) energie nám dá rovnicu (II)

$$
\begin{aligned}
E_{mech} &= \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}MU^2 - \frac{GMm}{L},\\
&= \frac{1}{2}\mu w^2 - \frac{GMm}{L},\\
&= \frac{1}{2}\mu\frac{L^2\omega^2}{\sin^2\beta} - \frac{GMm}{L},
\end{aligned}
$$

kde μ je takzvaná redukovaná hmotnosť, $\mu = \frac{Mm}{M+m}$. Pritom zo zadania (spomeňme si na zadané údaje d, v, α) vieme, že

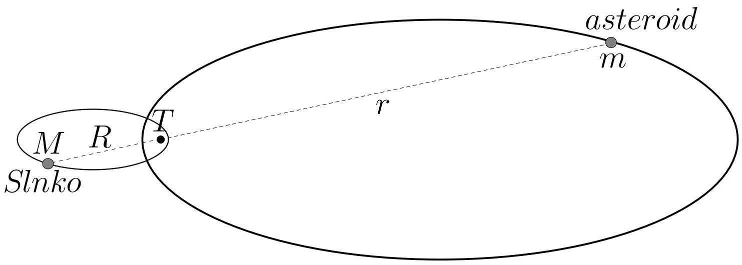
$$E_{mech} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GMm}{d}.$$

Prvý Keplerov zákon nám dá obraz toho, ako situácia vyzerá. Ak telesá obiehajú po uzavretých krivkách (elipsách), tak pohyb vyzerá zhruba ako na obrázku.

[7] Ak zanedbáme oblúkovitosť trajektórie, čo však regulérne môžeme, lebo nás zaujíma $\Delta t \to 0$.

[8] Vyššie členy nás nezaujímajú, lebo plochu opísanú sprievodičom dostanem tak, že plochu, ktorú opíše za čas Δt predelím týmto časom a urobím limitný prechod k $\Delta t \to 0$.

[9] To vzniklo spontánne! :-)



Tento obrázok nám hneď aj dáva návod, ako zistiť význačné charakteristiky pohybu. Totiž, hľadajme také body trajektórie asteroidu, v ktorých je sprievodič kolmý na rýchlosť (a teda aj dotyčnicu a platí $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta = 1 \Rightarrow w = L\omega$) – pohľadom na možné kužeľosečky zistíme, že takto celkom určite získame údaje o vrcholoch[10] dráhy. Ukáže sa, že iné body túto vlastnosť nemajú. Dosadením za ω z rovnice (I) do (II) dostanem kvadratickú rovnicu pre L

$$E_{mech} = \frac{\mu K^2}{2L^2} - \frac{GMm}{L},$$

ktorej diskriminant je (dosadím za K a E_{mech} a upravím)

$$\begin{aligned} D &= (GMm)^2 + 2\mu K^2 E_{mech}, \\ &= (GMm)^2 - 2GMm\mu d v^2 \sin^2\alpha + \mu^2 d^2 v^4 \sin^2\alpha, \\ &= (GMm - \mu d v^2 \sin\alpha)^2 + 2\mu d v^2 \sin\alpha(1 - \sin\alpha) > 0. \end{aligned}$$

Riešenie rovnice je $L_{1,2} = \frac{-GMm \pm \sqrt{D}}{2E}$ pre $E \neq 0$.

Zrejme nás interesujú iba kladné riešenia.

- Dá sa priamo ukázať[11], že ak $E_{mech} < 0$, tak obe riešenia sú kladné. Súvisí to s tým, že telesá nemajú dosť energie na to, aby sa od seba mohli vzdialiť ľubovoľne ďaleko[12]. Jediná so „slušných“ kužeľosečiek s takouto vlastnosťou je elipsa a tá má 2 vrcholy.

- Pre $E_{mech} = 0$ je riešená rovnica lineárna a jej riešenie je $L = \frac{\mu d^2 v^2 \sin^2\alpha}{2GMm}$. Trajektória je parabola. V limite pre $L \to \infty$ sa telesá prestanú hýbať. Pohyb nie je periodický.

- Pre $E_{mech} > 0$ sa dá ukázať, že kladné riešenie je práve jedno. Trajektória je hyperbola. V limite pre $L \to \infty$ sa telesá neprestanú hýbať. Pohyb nie je periodický.

[10] Vrchol kužeľosečky nazývam bod, v ktorom má krivka najväčšiu krivosť.

[11] Čítaj: „Odporúčam prekonať odpor, sadnúť si za stôl a presvedčiť sa o tom ručne-stručne. A kto s tým bude mať problém, nech sa ozve! (Aj tak sa nikdy nikto neozve…)“

[12] Na to by museli mať celkovú energiu nezápornú, lebo ak by sa aj v limite nekonečnej relatívnej (vzájomnej) vzdialenosti nepohybovali, tak by museli mať aspoň potenciálnu energiu pre $L \to \infty$ a tá je nulová.

RIEŠENIE: Zrejme ak $E_{mech} \geq 0$, tak pohyb nie je periodický, čo formálne môžeme zapísať $T = \infty$. Ak $E_{mech} < 0$, tak trajektória je elipsa, u ktorej poznám vzdialenosti L_1, L_2 oboch vrcholov od jedného z ohnísk. Potom veľkosť hlavnej polosi elipsy asteroidu je $a = k\frac{L_1+L_2}{2}$ a excentricita je $e = k\frac{|L_1-L_2|}{2}$. Veľkosť vedľajšej polosi je $b = \sqrt{a^2 - e^2} = k\sqrt{L_1 L_2}$.[13] Teraz už viem ľahko vyjadriť periódu obehu, lebo plocha elipsy asteroidu je $S = \pi ab$ a rýchlosť opisovania plochy sprievodičom asteroidu je $\frac{1}{2}k^2K = \frac{1}{2}k^2 dv \sin\alpha = konst$, teda

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}k^2 dv \sin\alpha} = ... = 2\pi G(M+m)\left(\frac{d}{2G(M+m) - dv^2}\right)^{3/2},$$

$$T \approx 2\pi GM\left(\frac{d}{2GM - dv^2}\right)^{3/2}.$$

Zrejme naozaj ak $m \ll M$, tak môžeme výraz $M + m$ nahradiť hmotnosťou Slnka M. Všimnite si, že výsledok nezávisí od uhla α.

Ešte jeden malý detail sme si nechali na záver. Totiž ak $\alpha = 0$ alebo $\alpha = \pi$, tak sa pohyb realizuje po priamke. Ak v našom priblížení hmotných bodov ignorujeme možnosť prípadnej zrážky, tak by sme malu riešiť diferenciálnu rovnicu

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMm}{L} = F_g,$$

$$\text{čiže rovnicu} \qquad L^2\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM}{k}$$

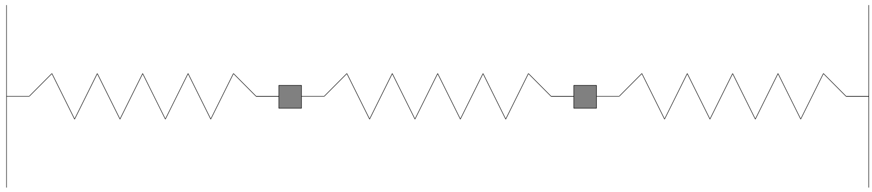
$$\text{s podmienkami} \qquad L(0) = d, \qquad k\frac{\mathrm{d}L(0)}{\mathrm{d}t} = v.$$

Táto rovnica by podľa takej našej fyzikálnej intuície mala mať riešenie až po okamih prvej zrážky (t.j. situáciu, keď $L = 0$) zhodné s riešením keplerovským v limite pre $\alpha \to 0$. Neskôr je to už celkom obskúrna záležitosť, keďže rovnica má v bode $L = 0$ singularitu. Snáď nemá veľmi zmysel hovoriť o tom, čo by bolo, keby sa naše hmotné body predsalen nezrazili a preleteli cez seba. Fyzikálne je oveľa zaujímavejšie uvažovať pohyb eliptický a zvážiť limitu, keď $b \to 0$ (resp. $\alpha \to 0$). Totiž pohyb presne po priamke má praktický nulovú pravdepodobnosť. Tým sme hotoví!

[13] Na výpočet b možno s výhodou použiť Vietove vzťahy. Pre neznalcov ich uvediem aj so stručným odvodením: Nech má kvadratická rovnica (I.) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ nezáporný diskriminant. Potom má 2 reálne korene, označme ich x_1, x_2 (nevylučujeme rovnosť). Zrejme sa teda rovnica (I.) dá zapísať v tvare $0 = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Porovnaním s pôvodným tvarom nájdeme Vietove vzťahy pre korene kvadratickej rovnice, totiž $a(x_1 + x_2) = -b; ax_1x_2 = c$. Preto platí $L_1L_2 = -\frac{\mu K^2}{2E_{mech}}$.

FX3 Pružinky (Opravoval Bzdušo)

Samo našiel N rovnakých teliesok s hmotnosťou m, $N+1$ pružiniek s tuhosťou k, a jednu priamku. Pružinky teda pospájal za seba na priamku a medzi každé dve nasledujúce upevnil jedno teliesko. Začiatok prvej pružinky a koniec poslednej pevne zafixoval, ale telieska nechal voľne pohybovať po danej priamke. Na obrázku vidíte nákres situácie pre $N=2$:



(a) Určte periódu všetkých harmonických pohybov, ktoré môže sústava vykonávať, pre $N=2$.

(b) Určte periódu všetkých harmonických pohybov, ktoré môže sústava vykonávať, pre $N=3$.

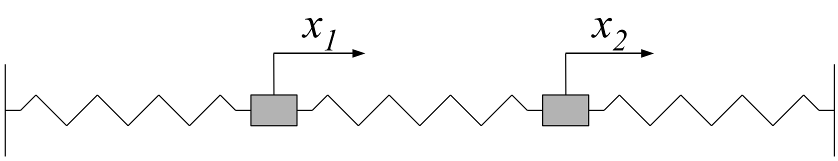
(c) Kvalitatívne popíšte, čo sa bude diať pre väčšie hodnoty N.

Časť (a)

Pre začiatok si v pamäti oživme štandardnú konvenciu, že časové derivácie označujeme bodkami nad derivovanou veličinou. Potom napríklad zrýchlenie, čiže druhá derivácia polohy, bude $a = \ddot{x}$.

Ďalej sa zamyslíme, aké harmonické pohyby by mohli nastať. Keď trochu popremýšľame, hneď nám napadne jeden: Mohlo by to celé kmitať stredovo symetricky. Potom sa dá špekulovať ďalej. Ako ale postupovať, aby sme si boli istí, že máme všetky riešenia? Treba si dať pozor, pretože závažia môžu mať vo všeobecnosti rôzne amplitúdy a rôzny fázový posun.[14]

Zvolíme teda inú taktiku: Použitím Newtonovho zákona vydolujeme pohybové rovnice a spravíme `ansatz`[15], tj. do pohybových rovníc dosadíme rovnice pre harmonický pohyb. To je taktika. Pre začiatok sa dohodnime na súradniciach. Tie budeme počítať vzhľadom na rovnovážnu polohu podľa obrázka:



[14] Alebo nie? Zamyslite sa!

[15] Z nemeckého `der Ansatz`.

Aké sily pôsobia na telesá pri výchylkách x_1, x_2? Ľahko sa presvedčíte, že[16]

$$\begin{aligned} F_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ F_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

kde teda F_1 a F_2 je výsledná sila pôsobiaca na ľavé a pravé teleso. Po vydelení hmotnosti a využití substitúcie $k/m = \omega_0^2$ dostávame pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 &= -2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_1. \end{aligned}$$

Ľaľa, rovnice spriahnutých oscilátorov. Už vieme, ako vyzerajú. :-)

Potiaľto žiaden problém (snáď tie dve bodky nepôsobia odstrašujúco). Teraz prvý netriviálny nápad, spomínaný ansatz. Vieme, že hľadaný harmonický pohyb musí byť popísateľný rovnicami

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1m} \cos \omega t \\ x_2(t) &= x_{2m} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

kde $\omega = 2\pi/T$ je uhlová frekvencia harmonického pohybu, x_{1m} a x_{2m} sú amplitúdy pohybov závaží a φ je fázový posun kmitov prvého telesa oproti druhému. Všimnite si, že pre druhé derivácie automaticky platí, že $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$. Po dosadení za druhú deriváciu dostaneme

$$\begin{aligned} -\omega^2 x_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2 \\ -\omega^2 x_2 &= -2\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_1. \end{aligned}$$

Čo vlastne chceme spočítať? Periódu. To znamená, že uhlová frekvencia nám ako riešenie celkom stačí. Všimnime si, že z tejto sústavy vieme elegantne vylúčiť premenné x. Stačí si vyjadriť x_2 pomocou x_1 z druhej rovnice a dosadiť do prvej z nich. To znamená

$$x_2 = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega^2} x_1$$

a odtiaľ[17]

$$-\omega^2 x_1 = -2\omega_0^2 x_1 + \frac{\omega_0^4}{2\omega_0^2 - \omega^2} x_1.$$

[16] Také isté rovnice by nám vyšli dokonca i v prípade, keď sú v základnom stave pružiny natiahnuté. Premyslite si to!

[17] Mimochodom, všimnite si, že z tohoto už vyplýva $\varphi = 0$ alebo $\varphi = \pi$.

Rovnicu môžem smelo vydeliť premennou x_1[18] a po drobnej úprave dostávame bikvadratickú rovnicu

$$\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 3\omega_0^4 = 0.$$

Odtiaľ ľahko nahliadneme (keďže ω musí byť kladné), že existujú dve riešenia $\omega_1 = \omega_0$ a $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$. Z toho vieme ľahko dopočítať aj periódy harmonických pohybov.

Pristavme sa však ešte na chvíľu pri probléme, ako z týchto uhlových frekvencií určiť, ako bude nájdený harmonický pohyb vlastne vyzerať. Kľúčová je, ako inak, rovnica, ktorá dáva do súvisu x_1 a x_2. Z nej vidno, že pre jednotlivé vypočítané ω bude pre výchylky v každom čase platiť $x_1 = x_2$ (pre $\omega = \omega_0$), resp. $x_1 = -x_2$ (pre $\omega = \sqrt{3}\omega_0$). A problém je vyriešený.

Skôr než sa touto metódou pustíme aj do druhej časti úlohy, zamyslime sa nad tým, čo by nám asi vyšlo. Budeme mať tri od času závislé výchylky x_1, x_2 a x_3 a je zrejmé, že budeme mať o kus viacej roboty s vylučovaním dvoch z nich z rovníc. Napokon by sme dostali rovnicu tretieho stupňa pre ω^2 a tú by sme už nejako vyriešili.

Časť (a) inak[19]

Ukážeme si ešte iný postup, ktorý sa ukazuje byť užitočný najmä pre väčšie počty závaží. Ide o to, že pohybové rovnice môžem prepísať (pomocou maticového násobenia) do tvaru

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ten stĺpec x-ov nie je nič iné, než stĺpec čísel (závislých od času), tzn. možno ho interpretovať ako vektor (závislý od času), označme ho $\mathbf{x}$. Maticu, ktorou je vektor násobený môžeme označiť ako A. Pohyb závaží je potom popísaný rovnicou

$$\ddot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

Toto sa až na formálne znamienko dosť podobá na rovnicu lineárneho harmonického oscilátora (LHO), v rovnici je však skrytých oveľa viacej čísel, než je napísaných.[20]

[18] Tu by mohol nastať problém, pokiaľ sa x_1 práve rovná nule. Je to funkcia od času a v niektorých časoch bude aj nulová. Korektná argumentácia je, že súčin funkcie x_1 a nejakého konštantného výrazu je rovný nule. Keďže hľadáme riešenie, keď x_1 je v nejakých časoch rôzne od nuly, konštantný výraz za x_1 musí byť rovný nule.

[19] Poriadnejšie vás tento postup naučí na výške docent Fecko na teoretickej mechanike.

[20] Pokiaľ by ste teraz hádali riešenie rovnice ako $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m \sin(-At)$, tak síce šikovne hľadáte analógiu, ale vo výsledku máte sínus matice. Sami uznáte, že to vyzerá akosi obskúrne. Analógia s LHO samozrejme existuje, ale budeme ju hľadať inak.

Teraz aplikujeme ten istý ansatz, ako v prvom spôsobe. To znamená, že

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega^2 x_1\\ \ddot{x}_2 &= -\omega^2 x_2,\end{aligned}$$

čo sa dá zápisať ekvivalentne maticovo

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

alebo ešte inak

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbb{I}_2 \mathbf{x},$$

kde magický znak $\mathbb{I}_2$ je jednotková matica rozmeru 2×2.

Pointa je, že pohybová rovnica má v skutočnosti tvar $\ddot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, avšak nie pre každé $\mathbf{x}$ sa dá prepísať na práve odvodený tvar, tj. na tvar popisujúci harmonický pohyb. Nás ale zaujímajú práve tie, ktoré sa dajú! Pre tie musí platiť rovnosť

$$\begin{aligned}A\mathbf{x} &= -\omega^2 \mathbb{I}_2 \mathbf{x}\\ \left(A + \omega^2 \mathbb{I}_2\right)\mathbf{x} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Slovami: Matica krát vektor je nulový vektor. Tu mi ako fakt musíte zobrať vedomosť, že *ak nenulový vektor násobený maticou dáva nulový vektor, tak determinant tejto matice musí byť nulový.*[21]

A stačí už len spočítať. Determinant matice budeme označovať zvis-

[21] Tvrdenie má viacero dôkazov, všetky sa však opierajú o pojmy lineárnej algebry, ktoré sa väčšina z vás naučí až na vysokej škole. Napriek tomu náznak jedného z nich uvediem:

Definícia determinantu je hrôzostrašná, jeho vlastnosti sú ale pôvabné. Ak sa obmedzíme na štvorcové matice A, B, tak platí

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) = \det A \det B$$

Inverzná matica A^{-1} k matici A je taká, že súčin $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$. Na základe vlastností determinantu na súčine to ale znamená, že

$$\det A \det A^{-1} = \det \mathbb{I} = 1,$$

kde poslednú rovnosť, tj že determinant jednotkovej matice je 1, zatiaľ vezmime ako fakt. Determinant je číslo, ktoré vzniká ako vybraná kombinácia súčinov prvkov matice, teda pre reálne matice je to reálne číslo. Ak má však matica A determinant rovný nule, tak jej inverzná matica by mala mať nekonečne veľký determinant. Skutočnosť je taká, že inverzná matica k nej ani neexistuje, tj. neexistuje matica B taká, že $B \cdot A = \mathbb{I}$.

Vezmime si rovnicu $\left(A + \omega^2\mathbb{I}_2\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a násobme zľava obe rovnice maticou M inverznou k ozátvorkovanej matici. Tak v ľavej časti rovnice dostávame $\mathbb{I}_2\mathbf{x} = \mathbf{x}$, v pravej $M \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, čiže rovnica nadobudne tvar $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. My ale chceme nenulové riešenia. Tie zrejme môžu existovať, len pokiaľ poslednú úpravu nemožno urobiť, teda pokiaľ neexistuje inverzná matica k M, teda pokiaľ jej determinant je nulový. $\square$

lými zátvorkami, podobne ako absolútnu hodnotu. Dostávame [22]

$$\begin{aligned} 0 &= |A + \omega^2 \mathbb{I}_2| \\ &= \begin{vmatrix} -2\omega_0^2 + \omega^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 + \omega^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right)^2 - \omega_0^4. \end{aligned}$$

Túto rovnicu sme už raz riešili. Riešenia sú $\omega_1 = \omega_0$ a $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$. To nám ako riešenie stačí. Keby sme chceli nájsť vektory výchyliek prislúchajúcich uhlovej frekvencii ω_i, tak stačí si rozpísať vektorovú rovnicu $\left(A + \omega_i^2 \mathbb{I}_2\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do komponent a tak nájsť vzťah medzi x_1 a x_2.[23]

Časť (b)

Kto chce, môže si to znova prepočítať prvým uvedeným postupom. My ostatní si vyskúšame novonaučený postup. Výchylky závaží si označíme úplne analogicky písmenami x_1, x_2, x_3. Ľahko sa presvedčíme, že

$$\begin{array}{rcrcrcr} \ddot{x}_1 &=& - & 2\omega_0^2 x_1 & + & \omega_0^2 x_2 & \\ \ddot{x}_2 &=& + & \omega_0^2 x_1 & - & 2\omega_0^2 x_2 & + \ \omega_0^2 x_3 \\ \ddot{x}_3 &=& & & + & \omega_0^2 x_2 & - \ 2\omega_0^2 x_3 \end{array}$$

To je v maticovom zápise ekvivalnentné s

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Označme maticu ako A, stĺpec výchyliek ako $\mathbf{x}$. Hľadáme lineárne harmonické pohyby, ansatz nám preto dáva $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$. Pri druhej derivácii teda treba každú zložku vektora $\mathbf{x}$ vynásobiť číslom $-\omega^2$ a preto

[22] Pripomeňme si, že determinant matice v závislosti od jej rozmeru sa počíta ako

$$\begin{array}{ll} 2 \times 2 \quad \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ 3 \times 3 \quad \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{cccccc} + & a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ - & a_{31}a_{22}a_{13} & - & a_{32}a_{23}a_{11} & - & a_{33}a_{21}a_{12} \end{array} \\ \vdots & \vdots \\ n \times n \quad \dots & \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij}, \end{array}$$

kde i označuje ľubovoľne zvolený riadok a kde v poslednom riadku M_{ij} označuje maticu rozmeru $(n-1) \times (n-1)$, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca. Posledné rekurentné určenie determinantu sa vo vyšších kruhoch nazýva *Laplaceov rozvoj determinantu* (podľa i-teho riadku).

[23] Gratulujem! Práve ste sa naučili hľadať takzvané vlastné čísla a vlastné vektory matice A. Koho by to zaujímalo viacej, môže hľadať na internete. Anglický preklad `eigenvalue` a `eigenvector` tiež pochádza z nemčiny.

$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x}$. Ak toto všetko zhrnieme do jednej rovnice, dostávame

$$-\omega^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}.$$

Ľavú stranu rovnice možno prepísať na $-\omega^2\mathbb{I}_3\mathbf{x}$. Popresúvaním členov rovnice dostávam

$$\left(A + \omega^2\mathbb{I}_3\right)\mathbf{x} = 0.$$

Povedali sme si, že nenulové riešenia $\mathbf{x}$ tejto rovnice existujú len pokiaľ je determinant matice, ktorou sa $\mathbf{x}$ násobí, nulový. Teda

$$\det\left(A + \omega^2\mathbb{I}_3\right) = 0.$$

Teraz si ukážeme, ako možno použiť pod čiarou spomínaný *Laplaceov rozvoj determinantu*. Pre matice 3×3 a pri výbere $i = 1$[24] dáva napísaná rovnica vzťah

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

pričom spočítať determinant matice 2 nie je žiadna veľká veda. Počítanie sa ešte značne zjednoduší vďaka niektorým nulám v matici. Po neveľkom trápení dostaneme z podmienky nulového determinantu rovnicu

$$\left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right)^3 = 2\omega_0^2\left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right).$$

Riešenia nájdeme rýchlo. Prvé nastáva, ak sa zátvorky vľavo i vpravo rovnajú nule. Ďalšie dve riešenia dostaneme vydelením rovnice touto zátvorkou a odmocnením. To znamená:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 2\omega_0^2 \\ \omega_2^2 &= \left(2 + \sqrt{2}\right)\omega_0^2 \\ \omega_3^2 &= \left(2 - \sqrt{2}\right)\omega_0^2. \end{aligned}$$

Periódu jednotlivých harmonických pohybov dorátame jednoducho ako $T_i = 2\pi/\omega_i$. Ukážeme si ešte, ako vyzerajú nájdené pohyby. Začneme s ω_1. Má platiť rovnica $\left(A + \omega_1^2\mathbb{I}_3\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tak dostávame (po vydelení oboch strán) rovnice ω_0^2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[24] Tzn., že rozvoj robíme podľa prvého riadku. Možno si, samozrejme, vybrať hociktorý riadok a výsledok bude ten istý.

čo po rozpísaní do komponent vedie na rovnice

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Z toho, že jedna rovnica sa nám tam zopakovala dvakrát, si netreba robiť ťažkú hlavu. Pekne z rovníc vidíme, že stredné závažie stojí a ľavé s pravým kmitajú stredovo symetricky. Vektor výchyliek možno preto zapísať ako

$$\mathbf{x} = x_m\,(1, 0, -1)\,,$$

kde x_m je zvolená amplitúda.

Ďalej pre ω_2. Tým istým spôsobom prídeme k

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To sa dá znova rozpísať do komponent a riešiť ako sústavu 3 rovníc o 3 neznámych. [25] Vyjde, že vektor výchyliek je (zapísané ako riadok)

$$\mathbf{x} = x_m\left(1, -\sqrt{2}, 1\right).$$

Napokon, čo to robí pre ω_3: Úplne analogicky prídeme k rovnici

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

čo vedie na výchylky

$$\mathbf{x} = x_m\left(1, \sqrt{2}, 1\right).$$

Časť (c)

Ak sa obzrieme na doterajšie riešenie, napadne nám, že pre veľké N by malo existovať N rôznych harmonických pohybov (tzv. *módov*).

[25] Komu niečo vraví *Gaussova eliminačná metóda*, stačí riešiť sústavu s rozšírenou maticou $(M|\,\mathbf{0})$, tzn. v tomto prípade

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{array}\right).$$

.

Skutočne je to tak, dokazovať to však nebudeme.[26] Môže sa stať, že niekoľko rôznych módov bude mať rovnakú uhlovú frekvenciu. Ešte by som však rád poukázal na dve zaujímavosti. Tak skúsme započať všeobecné riešenie.

Ak začneme hľadať pohybové rovnice, zistíme, že zrýchlenie nejakého konrétneho závažia v danom momente závisí len od jeho okamžitej polohy a od okamžitej polohy jeho susedov (len pružiny medzi nimi naň pôsobia nejakou silou). Ľahko sa presvedčíme, že výsledné pohybové rovnice možno prepísať do tvaru:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \omega_0^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Maticu označme ako A_n. Ak sa pustíme do hľadanie lineárnych harmonických pohybov (vlastných čísel matice!), budeme riešiť rovnicu $\det\left(A_n + \omega^2 \mathbb{I}_n\right) = 0$. Označme ešte $A_n + \omega^2 \mathbb{I}_n = B_n$.

Prvá zaujímavosť je toto: Ak si spravíme Laplaceov rozvoj determinantu podľa prvého riadku, dostaneme len dva členy (pretože v prvom riadku sú len dva nenulové členy). Avšak čo dostaneme, keď v B_n škrtnem prvý riadok a prvý stĺpec? Dostaneme B_{n-1}. Začína to vyzerať fajn.

Ďalší nenulový člen je v druhom stĺpci, pri výpočte člena pri ňom treba v B_n škrtnúť prvý riadok a druhý stĺpec. To už nie je taká pekná matica, ale ak si všimneme, že v jej prvom stĺpci je len jeden nenulový prvok, tak môžeme urobiť rozvoj aj tohoto determinantu podľa prvého stĺpca. A čuduj sa svete, zrazu tam vyjde matica B_{n-2}. Skúste si to napísať na papieri. Malo by vám vyjsť, že

$$\det B_n = \left(\omega^2 - 2\omega_0^2\right) \det B_{n-1} - \omega_0^4 \det B_{n-2}$$

To znamená asi toľko, že pokiaľ mám vyriešený problém pre $N = n-2$ a $N = n-1$, lacno ho vyriešim aj pre $N = n$. Skúste si teraz šikovne odvodiť, že uhlové frekvencie pre $N = 4$ sú

$$\omega_{1,2,3,4}^2 = \left(2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}\right)\omega_0^2.$$

[26] Bolo by potrebné sa odvolávať na *vetu o hlavných osiach*, ktorú je dosť obscénne vedieť už na strednej škole.

Ďalšou zaujímavosťou môže byť, čo robí tento systém pre $N \to \infty$. Vtedy má lepší zmysel skúmať počet $\mathrm{d}N$ módov prislúchajúcich na interval $(\omega; \omega + \mathrm{d}\omega)$, teda akúsi *hustotu módov* $g(\omega) = \mathrm{d}N/\mathrm{d}\omega$. To, čo by sme takto získali, by boli predpovede klasickej fyziky o správaní reálneho *jednorozmerného* kryštálu.[27]

Dá sa ukázať, že v zadanej limite platí výsledok:

$$g(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3}{8}\frac{N\omega^2}{\omega_0^2} & \omega \in (0\,, 2\omega_0) \\ 0 & \omega \notin (0\,, 2\omega_0) \end{array} \right\}$$

O jeho odvodení už ale naozaj inokedy. Mimochodom, všimnite si, že $N = \int g(\omega)\mathrm{d}\omega = N$, celkový počet módov sa aj v limite rovná počtu závaží.

[27] A dostali by sme len do určitej miery správny výsledok, pretože svet sa riadi zákonmi kvantovej fyziky. Pre "atómy na pružinkách", ktoré sú dosť malé, má kvantovanosť výrazný vplyv.

Výsledková listina FX po prvej sérii.

#	Riešiteľ	FX1	FX2	FX3	$\sum$
1.	Eugen Hruška	5	3.5	3	11.5
2.	Mária Kieferová	5	2	3	10
3.	Ján Bogár	3	3	1.5	7.5
4.	Kateřina Honzáková	2	5	-	7
5.	Martin Polačko	3	1	2	6
6.	Peter Vanya	2	3.5	-	5.5
7.	Prabhat Rao Pinnaka	-	-	2	2
8.	Adam Mohammad	-	0	-	0
	Michal Zajaček	0	-	-	0