

Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Janči biliardista

Zadanie. Janči mal planétu, ktorá sa pohybovala v radiálnom potenciáli $V(r) = \frac{A}{r^2}$. Popíšte rôzne režimy pohybu planéty v závislosti od počiatočných podmienok a parametrov systému.

Nápoveda: Riešte pohyb pre veličinu $\frac{1}{r}$ v závislosti od uhla.

Riešenie. (Autor riešenia: Janči)

opravuje Janči (jan.pulmann@gmail.com)

Dúfali sme, že vám táto úloha pomôže pri riešení ťažšej úlohy “Jakub mal sen” z prvej série. Vypožičajme si z Jakubovho vzoráku pohybové rovnice pre planétu v centrálnom poli: vzdialenosť od stredu splňa

$$m\ddot{r} = \frac{A}{r^3} + mr\dot{\varphi}^2,$$

zatiaľ čo pohybová rovnica pre uhol hovorí, že sa zachováva moment hybnosti

$$L = mr^2\dot{\varphi}.$$

Hlavný trik je spomenutý v nápovede, označme teda

$$u = 1/r$$

a pomocou pravidla o derivovaní zloženej funkcie skúsme vyjadriť diferenciálnu rovnicu pre $u(\varphi)$. Rýchlo sa to dá spraviť nasledovne:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\varphi}.$$

Druhu deriváciu spočítame podobne

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} \frac{dr}{dt} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2}.$$

Dosadíme do pohybovej rovnice pre a dostaneme

$$-\frac{L^2}{m r^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{A}{r^3} + mr \frac{L^2}{m^2 r^2},$$

alebo

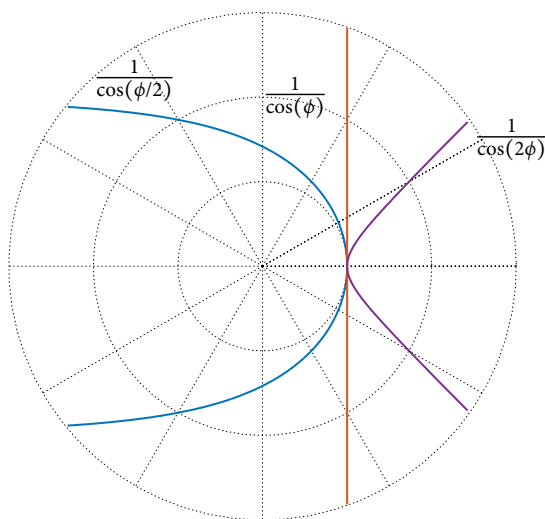
$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\left(\frac{mA}{L^2} + 1\right)u.$$

Výsledok závisí na konštante $\frac{mA}{L^2} + 1$, konkrétne jej znamienko udá, či sú riešením trigonometrické, hyperbolické alebo lineárne funkcie:

- Ak je táto konštanta kladná, tak preto, lebo A je kladné (odpudivá sila) alebo záporné a blízke nuly (slabá príťažlivá sila v porovnaní s momentom hybnosti). Všeobecné riešenie je vtedy trigonometrická funkcia

$$u(\varphi) = a \cos(s(\varphi - \varphi_0)) \quad \text{kde } s = \sqrt{\frac{mA}{L^2} + 1}$$

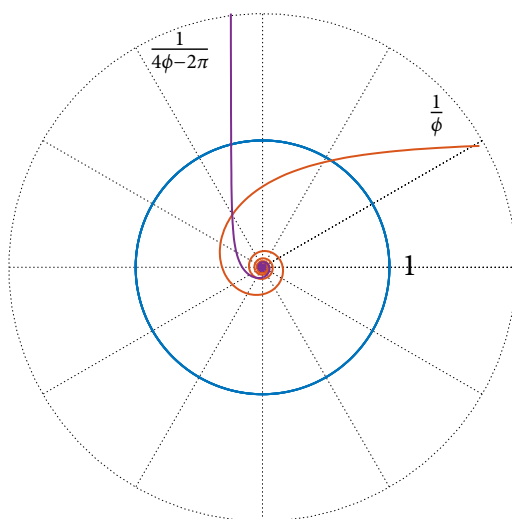
ktoré je platné pre rozsah uhlov φ tak, aby bol argument kosínusu medzi $-\pi/2$ a $\pi/2$ (plus $2k\pi$). Nezabudnime, že nás zaujíma veličina $r = 1/u$: planéta teda priletí z nekonečna z nejakého uhla, obletí stred a odletí do nekonečna.



- Ak je $\frac{mA}{L^2} + 1 = 0$, dostávame

$$u(\varphi) = a\varphi + b,$$

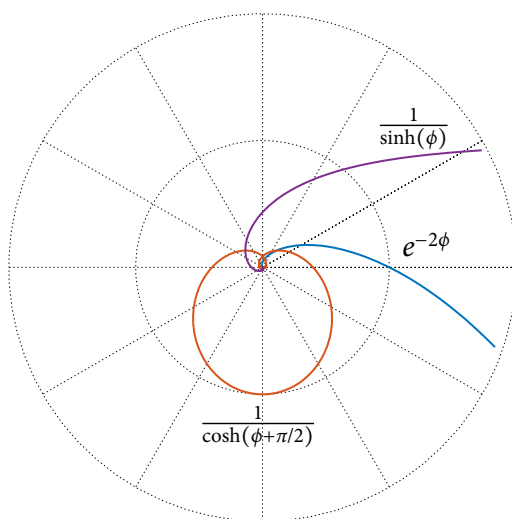
teda špirálový pád do (alebo odlet zo) stredu. Špeciálne pre $a = 0$ dostávame kruhový pohyb.



- Ak je $\frac{mA}{L^2} + 1$ záporné, dostávame

$$u(\varphi) = ae^{s\varphi} + be^{-s\varphi}, \quad \text{kde } s = \sqrt{-\left(\frac{mA}{L^2} + 1\right)},$$

čo sa dá alternatívne vyjadriť pomocou hyperbolických sínusov a kosínusov. Takáto lineárna kombinácia sa vynuluje maximálne raz, dostávame teda buď pohyb “nekonečno--stred”, alebo “stred--stred”.



Tieto trajektórie, vykreslené v radiálnych súradniciach $r(\varphi)$, sa nazývajú Cotesove špirály, po Newtonovom kamarátovi Rogerovi Cotesovi.

2.2 Dominik zvráča

Zadanie. Dominik pozval 3 navzájom na seba kolmé nekonečné vodivé plochy ($x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$). Do polohy (x, y, z) položil náboj Q (súradnice x , y a z sú kladné). Aká je potenciálna energia náboja Q voči nekonečnu?

Riešenie. (Autor riešenia: Dominik)

opravuje Dominik (dominikrist@gmail.com)

Hľadáme elektrostatické pole v okolí náboja Q , ktorý je pri vodivých plochách. Prítomnosťou náboja Q sa vo vodičoch naindukujú tieniaci náboje, a to tak, aby vodivé plochy boli ekvipotenciálnymi hladinami. Totiž ak by na nich nebol všade rovnaký potenciál, náboj vo vodičoch by tiekol až dovtedy, kým by sa potenciál nevyrovnal. My predpokladáme elektrostatiku, takže všetky polia a náboje sú už ustálené.

Máme teda riešiť Poissonovu rovnicu (modulo konštanty)

$$\Delta\phi = \rho \quad (2.1)$$

pre potenciál ϕ v oblasti $x, y, z \geq 0$ s nábojovým rozložením ρ a s okrajovou podmienkou $\phi|_{\text{okraj}} = 0$. Vďaka linearite má takáto úloha jednoznačné riešenie a na jeho nájdenie môžeme použiť nasledovný trik. Namiesto vodivých plôch si predstavíme fiktívne náboje kdesi mimo pôvodnú oblasť. Novou úlohou je potom zvoliť ich tak, aby sme splnili okrajovú podmienku. Potom takáto konfigurácia nábojov musí byť to správne a jediné riešenie pôvodnej úlohy, pretože vnútri oblasti sme rozloženie náboja nezmenili a na jeho okraji je podmienka splnená. Tento trik sa volá *metóda imaginárnych nábojov*.

Pre jednu nekonečnú vodivú plochu sa dá ľahko nahliadnuť, že imaginárny náboj bude mať rovnakú veľkosť ale opačné znamienko a treba ho umiestniť ako zrkadlový obraz skutočného náboja. Stačí si napísať ako vyzerá potenciál takejto konfigurácie nábojov a presvedčiť sa, že je nulový na ploche kolmo prechádzajúcej stredom spojnice medzi nábojmi.

V prípade dvoch nekonečných plôch zvierajúcich pravý uhol je situácia podobná. Za každú plochu si musíme predstaviť jeden zrkadlový náboj s opačným znamienkom. Avšak to nie je všetko! Keďže máme obe plochy naraz, naše dva zrkadlové náboje by sa navzájom rušili. Preto treba pridať tretí, ktorý je zrkadlovým obrazom našich dvoch imaginárnych nábojov! Máme teda pôvodný náboj Q v mieste (x, y) a imaginárny náboj Q v mieste $(-x, -y)$ a dva imaginárne náboje $-Q$ v miestach $(-x, y)$ a $(x, -y)$. Opäť sa dá nahliadnuť správnosť riešenia, keď si napíšete potenciál od takejto konfigurácie a pozriete sa, kde je nulový.

Nás však zaujíma prípad **troch kolmých nekonečných plôch**. Z predošlého už poľahky uhádneme správnu konfiguráciu. Pre $x, y, z \geq 0$ máme náboje Q v miestach

$$Q: (x, y, z), (x, -y, -z), (-x, y, -z), (-x, -y, z), \quad (2.2)$$

a náboje $-Q$ v miestach

$$-Q: (-x, y, z), (x, -y, z), (x, y, -z), (-x, -y, -z). \quad (2.3)$$

Kompaktne sa to dá zapísať ako

$$\text{náboj } (-1)^{i+j+k}Q \text{ na mieste } ((-1)^i x, (-1)^j y, (-1)^k z) \mathbf{r}_{ijk}. \quad (2.4)$$

Potenciál od takejto konfigurácie nábojov vyzerá nasledovne:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j,k=0}^1 \frac{(-1)^{i+j+k}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ijk}|} = \phi_0 + \phi_{\text{ind}}, \quad (2.5)$$

a teda sa skladá z príspevku od skutočného náboja ϕ_0 (člen s $i = j = k = 0$) a príspevku od imaginárnych nábojov, tj. náboja indukovaného vo vodivých plochách ϕ_{ind} (členy s $i + j + k > 0$).

Potenciálna energia reálneho náboja Q v mieste (x, y, z) je potom daná vzťahom¹

$$U = \frac{1}{2} Q \phi_{\text{ind}}(x, y, z). \quad (2.6)$$

Plochy a náboj sa priťahujú, takže by mala vyjsť záporná. Po dosadení do vzorca dostávame

$$U = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad (2.7)$$

čo naozaj dáva záporné hodnoty pre $x, y, z > 0$.

2.3 Jakub inštalatér

Zadanie. Jakub mal trubicu (kruhový prierez) s polomerom R a dĺžkou L ($L \gg R$). Cez trubicu púšťal pod tlakom p tekutinu s viskozitou μ . Aký bol prietok Q_0 , ak uvažujeme laminárne prúdenie a okrajovú podmienku, že sa tekutina neklže po povrchu trubice? Jakub vymenil trubicu za novú s tými istými rozmermi, ale z iného materiálu. Nová trubica umožňovala klzanie s okrajovou podmienkou $v(\text{okraj}) = b|\text{grad } v(\text{okraj})|$, kde b je parameter trubice. Ako sa zmenil prietok Q v novej trubici? Predpokladajte nestlačiteľnú tekutinu.

Riešenie. (Autor riešenia: **Jakub**)

opravuje **Jakub** (jakub.kocak@trojsten.sk)

Nájsť riešenie dynamiky tekutín je notoricky veľmi náročný problém **riešenia Navierových–Stokesových rovníc**. Hlavným dôvodom sú turbulencie a turbulentné prúdenie. Ak budeme postupne zväčšovať rozmer, tak každé prúdenie nakoniec je turbulentné. Ak je potrubie dostatočne malé alebo je prúdenie dostatočne pomalé, tak pozorujeme laminárne prúdenie, teda prúdenie tekutiny vo vrstvách, ktoré sa navzájom nemiešajú a iba po sebe klžu. Vo všeobecnosti režim prúdenia je určený bezrozmernou veličinou menom Reynoldsovo číslo Re , ktoré je definované ako

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu}, \quad (3.1)$$

kde ρ je hustota tekutiny, u je priemerná rýchlosť prúdenia, D je priemer trubice (alebo iný charakteristický rozmer prúdenia) a μ je viskozita tekutiny. Zhruba, ak je Reynoldsovo číslo menšie ako 2000, tak je prúdenie laminárne. Ak je väčšie ako 4000, tak je prúdenie turbulentné. Medzi hodnotami 2000 a 4000 je prechodný režim, ktorý má prvky laminárneho a turbulentného prúdenia.

¹ Ak tento vzťah nepoznáte, dá sa odvodiť napr. takto: namiesto ťahania náboja Q z miesta (x, y, z) do nekonečna budeme toto miesto postupne nabíjať z 0 až po Q . Každé zväčšenie náboja z q na $q + dq$ stojí prácu $\phi_{\text{ind}}(q) dq$ – v elektrostatike náboj cíti iba externé pole a nie svoje vlastné. Keďže $\phi_{\text{ind}}(q)$ závisí lineárne od náboja, ktorý ho indukuje, platí $\phi_{\text{ind}}(q) = q \frac{\phi_{\text{ind}}(Q)}{Q}$. Celková práca je daná súčtom jednotlivých príspevkov $U = \int_0^Q \phi_{\text{ind}}(q) dq = \frac{\phi_{\text{ind}}(Q)}{Q} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \phi_{\text{ind}}(Q) Q$.

Našťastie úloha vyžaduje laminárne prúdenie, čím sa popis prúdenia zjednoduší. Kvôli tvaru trubice je ideálne zvoliť cylindrické súradnice r (rozsah od 0 do R), ϕ (rozsah od 0 do 2π) a z (rozsah od 0 do L). Na začiatku trubice ($z = 0$) je tlak p , na konci trubice ($z = L$) je nulový tlak.² Keďže sa prierez trubice nemení, uvažujeme nestlačiteľnú tekutinu a dĺžka trubice je výrazne väčšia ako polomer, tak nás nezaujíma, čo sa deje pri vstupe a výstupe z trubice³ a môžeme uvažovať, že prúdenie bude v každom bode rovnobežne s osou z .

$$\mathbf{v}(r, \phi, z) = v(r, \phi, z)\mathbf{e}_z \quad (3.2)$$

Keďže je problém rotačne symetrický okolo osi z , tak veľkosť rýchlosti v nebude závisieť na uhle ϕ . Takisto, sa nám nikde v trubici tekutina nestráca, ani nevzniká. Preto rýchlosť nezávisí na súradnici z .⁴

$$\mathbf{v}(r, \phi, z) = v(r)\mathbf{e}_z \quad (3.3)$$

Môžeme teda spojiť časti tekutiny s rovnakou rýchlosťou do spoločných vrstiev, ktoré sa pohybujú pokope. Ak si zoberieme tekutinu v Δr okolí polomeru r (teda medzivalčie v rozsahu $r - \frac{1}{2}\Delta r$ až $r + \frac{1}{2}\Delta r$), tak na neho pôsobia tri sily:

- tlaková sila na začiatku trubice $p\Delta S = 2\pi r p \Delta r$,
- trecia sila na vonkajšom povrchu medzivalčia $\mu \frac{dv}{dr} \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) S = \mu \frac{dv}{dr} \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) 2\pi \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) L$,
- trecia sila na vnútornom povrchu medzivalčia $-\mu \frac{dv}{dr} \left(r - \frac{1}{2}\Delta r\right) S = -\mu \frac{dv}{dr} \left(r - \frac{1}{2}\Delta r\right) 2\pi \left(r - \frac{1}{2}\Delta r\right) L$.

Súčet týchto síl sa musí navzájom vykompenzovať na nulu, keďže tekutina nezrýchľuje, ani nespomaľuje.

$$0 = 2\pi r p \Delta r + \mu \frac{dv}{dr} \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) 2\pi \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) L - \mu \frac{dv}{dr} \left(r - \frac{1}{2}\Delta r\right) 2\pi \left(r - \frac{1}{2}\Delta r\right) L \quad (3.4)$$

Ak pošleme hrúbku medzivalčia $\Delta r \rightarrow 0$, tak môžeme vzťahy nahradiť ich diferenciálnymi verziami

$$\Delta r \rightarrow dr, \quad \frac{dv}{dr} \left(r \pm \frac{1}{2}\Delta r\right) = \frac{dv}{dr}(r) \pm \frac{1}{2}dr \frac{d^2v}{dr^2}(r) \quad (3.5)$$

Po dosadení dostaneme

$$0 = \left[rp + \mu L \left(r \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} \right) \right] 2\pi dr, \quad (3.6)$$

z čoho vieme odvodiť diferenciálnu rovnicu

$$pr + \mu L \left(r \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} \right) = 0. \quad (3.7)$$

² Reálne tam nejaký tlak bude, ale dôležitý je iba rozdiel tlakov.

³ Prúdenie tekutiny závisí na okrajových podmienkach. Okrajové podmienky na stenách trubice sú dané, ale okrajové podmienky na vstupe a výstupe trubice nie sú dané. Pre reálne trubice závisí na tom, aký rýchlostný profil "nalievame" do trubice. Toto prechodné prúdenie sa postupne pozdĺž trubice ustáli. Preto pre dostatočne dlhé trubice nemá okrajová podmienka na vstupe a výstupe výrazný vplyv na prúdenie v trubici.

⁴ Ak by sa rýchlosť menila so súradnicou z , tak by veličina $\int_0^R \frac{\partial}{\partial z} v(r, z) 2\pi r dr$ pre konkrétnu súradnicu z vravela o stratenom/prišlom prietoku tekutiny. Do sa dá dosiahnuť iba tak, ak $\frac{\partial}{\partial z} v(r, z) = 0$ a teda rýchlosť nezávisí na z .

Môžeme sa na ňu pozeráť ako na rovnice pre premennú $Y(r) = \frac{dv}{dr}(r)$

$$r \frac{dY}{dr} + Y = -\frac{p}{\mu L} r. \quad (3.8)$$

Môžeme si všimnúť, že ľavá strana rovnice je rozložená derivácia⁵

$$\frac{d}{dr}(rY) = -\frac{p}{\mu L} r. \quad (3.9)$$

Preintegrovaním oboch strán dostaneme

$$rY(r) = -\frac{p}{2\mu L} r^2 + C, \quad \implies \quad Y(r) = -\frac{p}{2\mu L} r + \frac{C}{r}. \quad (3.10)$$

Druhou integráciou $Y = \frac{dv}{dr}$ dostaneme funkciu rýchlosti $v(r)$

$$v(r) = -\frac{p}{4\mu L} r^2 + C \ln r + D. \quad (3.11)$$

Pre nenulovú hodnotu C dostávame nefyzikálne nekonečnú rýchlosť v strede trubice $r = 0$, preto musíme zvoliť $C = 0$. Ostáva nám iba jediný parameter D , ktorý je určený okrajovou podmienkou na okraji trubice. Bez ohľadu na okrajovú podmienku je však rýchlostný profil tekutiny kvadratický s maximálnou rýchlosťou v strede (čo je v súlade s fyzikálnou intuíciou).

Tekutina bez klzania

Ak sa tekutina neklže na okraji ($r = R$), tak dostaneme nasledujúci kvadratický rýchlostný profil

$$v(R) = 0, \quad \implies \quad v(r) = \frac{p}{4\mu L} (R^2 - r^2). \quad (3.12)$$

Celkový prietok Q_0 tak dostaneme

$$Q_0 = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi p}{2\mu L} \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi p R^4}{8\mu L}. \quad (3.13)$$

Spätnou kontrolou po dosadení do Reynoldovho čísla dostaneme

$$\text{Re} = \frac{\rho p R^3}{4\mu^2 L}, \quad (3.14)$$

to znamená, že trubica musí byť dostatočne malá, lebo od určitého polomeru už sa nebude tekutina správať laminárne. Napríklad pre krv vo väčšine žilách a tepnách dostaneme laminárne prúdenie (až na aortu, kde už môžeme pozorovať turbulentné prúdenie). Ak pustíme vodu z kohútika pomaly, tak dostaneme laminárne prúdenie. Ale už pri plnom prúde dostávame turbulentné prúdenie.

⁵Vo všeobecnosti, ak máme rovnicu v tvare $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, tak sa tento trik dá vždy použiť, ak rovnicu vhodne prenásobíme faktorom $e^{\int P(x)dx}$.

Tekutina s klzáním

Ak sa tekutina klže a má nenulovú rýchlosť na okraji, tak gradient rýchlosti na okraji je

$$\text{grad}v(\text{okraj}) = \frac{dv}{dr}(r = R) = Y(R) = -\frac{pR}{2\mu L}. \quad (3.15)$$

Môžeme si všimnúť, že gradient na okraji je pre všetky trubice rovnaký bez ohľadu na to, či sa tekutina klže alebo nie. Z gradientu vieme zistiť rýchlosť na okraji a presne o túto rýchlosť sa zvýši rýchlostný profil.

$$v(R) = \frac{pbR}{2\mu L}, \quad \implies \quad v(r) = \frac{p}{4\mu L} (R^2 - r^2) + \frac{pbR}{2\mu L} \quad (3.16)$$

Pre celkový prietok Q tak dostaneme

$$Q = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = Q_0 + \int_0^R 2\pi r v(R) dr = Q_0 + \frac{\pi p b R^3}{2\mu L} = Q_0 \left(1 + \frac{4b}{R}\right). \quad (3.17)$$

Tento výsledok sa dá nahliadnuť aj z iného pohľadu. Okrajová podmienka klzania tekutiny sa dá interpretovať tak, že trubica má väčší polomer R o hodnotu b a správa sa ako trubica bez klzania (keďže ak predĺžime rýchlostný profil pre $r > R$, tak dostaneme nulovú rýchlosť pre približne $r = R + b$). Keďže má tekutina na okraji skoro nulovú rýchlosť, tak skoro vôbec neprispieva ku celkovému prietoku a tak prietok Q môžeme odhadnúť tak, že použijeme vzťah pre Q_0 , len namiesto R dostadíme $R + b$.

$$Q = \frac{\pi p (R + b)^4}{8\mu L} = \frac{\pi p R^4}{8\mu L} \left(1 + \frac{b}{R}\right)^4 \approx \frac{\pi p R^4}{8\mu L} \left(1 + \frac{4b}{R}\right) \quad (3.18)$$