

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Janči mal tieň

Zadanie. Janči si pokojne vykračoval a zrazu ho oziabalo. O koľko klesne množstvo energie dopadajúce na zem kvôli zatmeniu Slnka v mieste, kde je zatmenie úplné?

Uvažujte dva modely:

1. **model s konštantným vyžarovaním:** Povrch Slnka vyžaruje rovnomerne do každého smeru.
2. **lineárny model s korekciou do prvého rádu:** Povrch Slnka vyžaruje ako

$$\frac{I(\psi)}{I(0)} = (1 - u) + u \cos \psi, \quad (1.1)$$

kde $I(\psi)$ je intenzita žiarenia z povrchu Slnka pod uhlom ψ (meraný od normály) a u je fixný parameter modelu.

Pre prvý model vypočítajte profil poklesu. Pre oba modely vypočítajte priemernú hodnotu poklesu počas celého zatmenia a popíšte závislosť priemerného poklesu na parametri u .

Predpokladajte, že:

- Slnko je guľa,
- Slnko a Mesiak majú kruhový obrys rovnakej veľkosti,
- dráhy Slnka a Mesiaca sú zarovnané a stred Mesiaca prechádza cez stred Slnka.

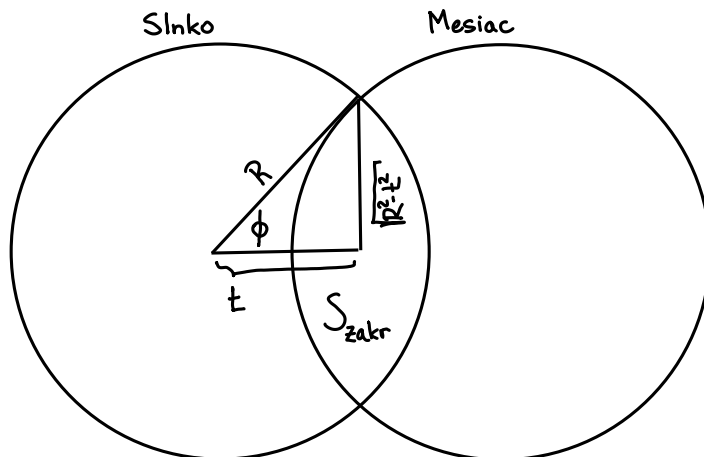
Riešenie. (Autor riešenia: Janči)

opravuje Janči (jan.pulmann@gmail.com)

Vyriešme si najprv **jednoduchší model**, bez parametra u . Na popis polohy Mesiaca použijeme súradnicu t rovnú polovici vzdialenosti stredov kruhov: zatmenie začína na $t = R$ a úplné zatmenie je pre $t = 0$.

$$S_{\text{zakr}} = 2 \left(\pi R^2 \frac{2\phi(t)}{2\pi} - t \sqrt{R^2 - t^2} \right), \text{ kde } \cos \phi = \frac{t}{R}.$$

Zakrytá plocha Slnka je dvojnásobok plochy kruhového odseku:

Obrázok 1.1: Súradnica t a plocha kruhového odseku

Vzdialenosť t sa mení lineárne s časom, a teda priemerný pokles výkonu je rovný priemernému relatívnemu zakrytiu. To stačí navyše počítať od začiatku zatmenia po úplné zatmenie, keďže odkrytie prebieha symetricky.

Priemerný percentuálny pokles výkonu je teda

$$\frac{1}{R} \int_0^R \frac{S_{\text{zakr}}}{\pi R^2} dt = \frac{2}{\pi R} \int_0^R \left(\phi(t) - \frac{t}{R} \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} \right) dt.$$

V prvom člene použijeme vzťah medzi t a ϕ , teda $\sin \phi d\phi = dt/R$, aby sme dostali¹

$$\begin{aligned} \text{1. člen} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\phi \sin \phi}_{= (-\phi \cos \phi)' + \cos \phi} d\phi = \frac{2}{\pi} \left([-\phi \cos \phi]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi \right) = \frac{2}{\pi} (0 + 1) = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Druhý člen dáva

$$\begin{aligned} \text{2. člen} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^R \underbrace{\frac{t}{R} \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} \frac{dt}{R}}_{\text{nech } s=t^2/R^2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-s} ds = \frac{2}{3\pi} [(1-s)^{3/2}]_0^1 = -\frac{2}{3\pi}. \end{aligned}$$

Spolu je teda priemerný relatívny pokles výkonu za zatmenie

$$\frac{2}{\pi} (1 - 1/3) = \frac{4}{3\pi} \doteq 42\%.$$

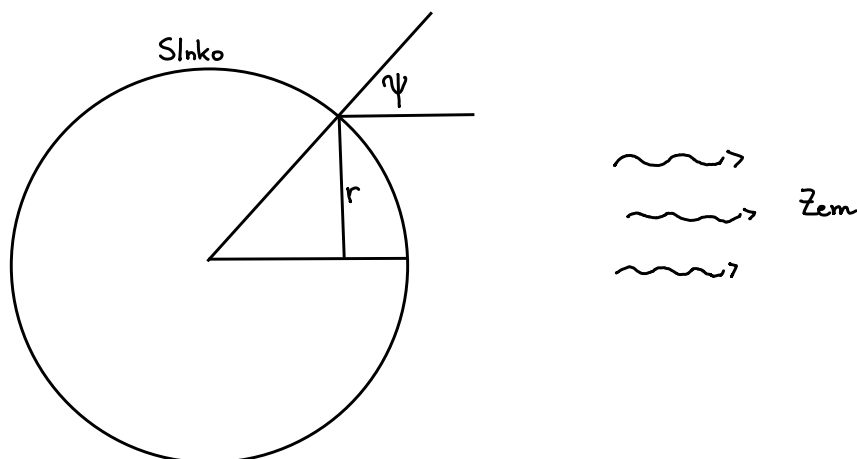
Zatmenie, ktoré trvá dve a pol hodiny, teda spôsobí pokles výkonu na jednotku plochy o približne 5.2 MJ/m^2 , ak uvažujeme dopadajúci výkon Slnka rovný 1360 W/m^2 (skutočný výkon je okolo $1000\text{--}1100 \text{ W/m}^2$ kvôli rozptylu v atmosfére, a teda aj pokles výkonu bude nižší).

¹Znamienka pri substitúciách ignorujeme a poradie hraníc integrálu vždy volíme tak, aby sme dostali kladný výsledok.

V **komplikovanejšom modeli** sa mení intenzita s polohou v slnečnom disku podľa

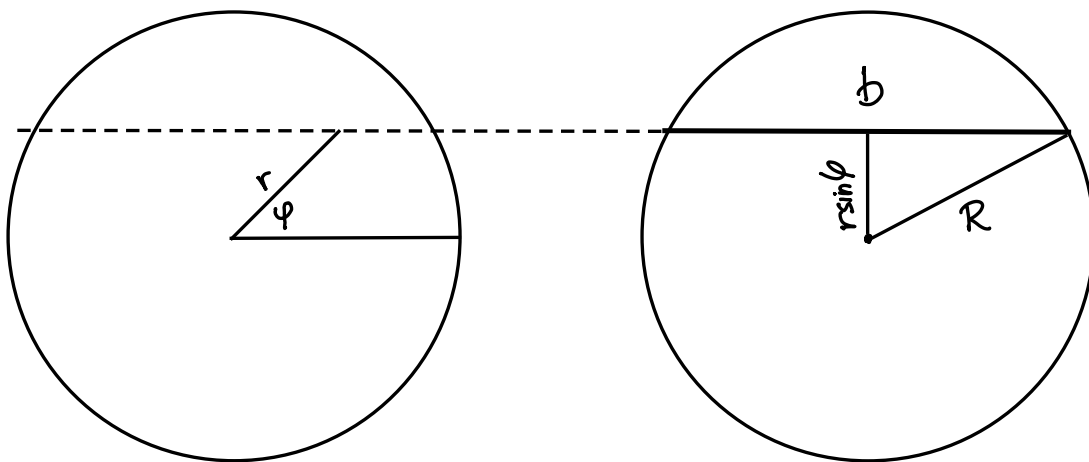
$$I(\psi) = I_0(1 - u + u \cos \psi),$$

kde uhol ψ závisí od vzdialenosti od stredu disku ako $\sin \psi = r/R$.



Obrázok 1.2: Súvis uhla ψ a vzdialenosti od stredu slnečného disku r .

Uvažujme teda bod disku na polárnych súradniciach (r, φ) a určíme, ako dlho bude tento bod zakrytý. Tento čas závisí lineárne od $b(r, \varphi)$, šírky Mesiaca v tejto výške, lebo presne táto časť Mesiaca zakrýva tento bod².



Obrázok 1.3: Šírka Mesiaca b zakrývajúca daný bod Slnka.

Táto šírka je rovná

$$b(r, \varphi) = 2\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$$

²Takúto šikovnú parametrizáciu si všimol Richard Dudek.

a bod (r, φ) je zakrytý $\frac{b}{4R}$ času zatmenia. Celkový **stratený** výkon je integrál týchto príspevkov cez slnečný disk

$$I_{\text{strata}}(u) = \int_{\text{kruh}} I(\psi; u) \frac{b(r, \varphi)}{4R} dS = \frac{I_0}{2} \int_{\text{kruh}} \left(1 - u + u \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \sin^2 \varphi dS.$$

Prejdime do kartézskych súradníc normovaných R , teda $x = r/R \cos \varphi$ a $y = r/R \sin \varphi$, element plochy je $R^2 dx dy$

$$I_{\text{strata}}(u) = \frac{I_0(1-u)R^2}{2} \int_{\text{kruh}} \sqrt{1-y^2} dx dy + \frac{I_0 u R^2}{2} \int_{\text{kruh}} \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy.$$

Prvý integrál je jednoducho

$$\int_{\text{kruh}} \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_{y=-1}^{y=1} \sqrt{1-y^2} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy = 2 \int_{-1}^1 (1-y^2) dy = 2[y - y^3/3]_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

Druhý integrál je komplikovanejší, ale dá sa vypočítať nasledovne

$$\int_{\text{kruh}} \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_{y=-1}^{y=1} \sqrt{1-y^2} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{(1-y^2) \left(1 - \frac{x^2}{1-y^2} \right)} dx dy = \dots$$

Vo vnútornom integrále použijeme substitúciu $\xi = x/\sqrt{1-y^2}$ a dostaneme

$$\dots = \int_{y=-1}^{y=1} (1-y^2)^{3/2} \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi}_{\text{plocha polkruhu}} dy = \frac{\pi}{2} \underbrace{\int_{-1}^1 (1-y^2)^{3/2} dy}_{y=\sin \alpha} = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(e^{4i\alpha} + e^{-i\alpha})^4}{16} d\alpha.$$

Rozviňme

$$(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})^4 = e^{4i\alpha} + 4e^{2i\alpha} + 6 + 4e^{-2i\alpha} + e^{-4i\alpha}$$

a všimnime si, že len prostredný člen má nenulový integrál cez $[-\pi/2, \pi/2]$, keďže ostatné členy majú periódu rovnú alebo zlomok dĺžky tohoto intervalu. Pre celkový integrál, ktorý počítame, teda dostávame

$$\dots = \frac{\pi}{2} \frac{6}{16} \pi = \frac{3\pi^2}{16}.$$

Spočítali sme teda celkový stratený výkon

$$I_{\text{strata}}(u) = \frac{I_0 R^2}{2} \left((1-u) \frac{8}{3} + u \frac{3\pi^2}{16} \right).$$

Tento výkon musíme podeliť celkovým priemerným výkonom v prípade nezakrytého Slnka

$$I_{\text{ref}}(u) = I_{\text{tot}}(u) = \int_{\text{kruh}} I(\psi; u) dS = I_0 \int_{\text{kruh}} \left(1 - u + u \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) dS.$$

Jediný netriviálny integrál je

$$\int_{\text{kruh}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} dS = 2\pi \int_0^R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} r dr = \frac{2\pi R^2}{3} \left[-\left(1 - r^2/R^2 \right) \right]_0^R = \frac{2\pi R^2}{3}$$

. Spolu teda dostaneme

$$I_{\text{ref}}(u) = I_0 \pi R^2 \left((1-u) + u \frac{2}{3} \right).$$

Priemerný pokles výkonu je teda pomer

$$\frac{I_{\text{strata}}(u)}{I_{\text{ref}}(u)} = \frac{(1-u) \frac{4}{3\pi} + u \frac{3\pi}{32}}{1-u+u \frac{2}{3}},$$

čo sa mení od hodnoty 42% pre $u = 0$ po 44% pre $u = 1$.

1.2 Jakub mal sen

Zadanie. Jakuba zaujímalo, ako veľmi je náš gravitačný zákon výnimočný a či neexistujú iné zákony, ktoré by tiež viedli k uzavretým periodickým dráham. Predpokladajte, že Slnko stojí nehybne v strede sústavy a gravitačný potenciál planéty $V(r)$ závisí iba od vzdialenosti od Slnka r . Aké sú všetky možné funkcie $V(r)$, ktoré vedú k periodickým dráham planéty bez ohľadu na počiatočnú polohu a rýchlosť?

Nápoveda 1: Najprv sa pozrite na kruhové dráhy, potom na skoro kruhové dráhy (lineárne) a následne na všeobecnejšie dráhy, napr. skoro kruhové dráhy (nelineárne).

Nápoveda 2: Pre popis periodických funkcií existuje vhodne zvolený tvar (ansatz) funkcií.

Riešenie. (Autor riešenia: **Jakub**)

opravuje **Jakub** (jakub.kocak@trojsten.sk)

Pri riešení tejto úlohy si precvičíme veľké množstvo nástrojov (Eulerove-Lagrangeove rovnice, efektívny potenciál, Taylorov rozvoj, Fourierov rozvoj). Niektoré môžu byť pre vás nové, ale ak si tieto nástroje osvojíte a pridáte si ich do svojho "vercajku", budú vám užitočné pri iných úlohách.

Začínáme s planétou s počiatočnou polohou $\mathbf{r}_0$ a počiatočnou rýchlosťou $\mathbf{v}_0$. Keďže potenciál $V(r)$ závisí iba od vzdialenosti, gravitačná sila zodpovedajúca tomuto potenciálu je v smere negatívneho gradientu $-\nabla V$, čo znamená vždy v radiálnom smere $\mathbf{r}_0$. Keďže na planétu pôsobí sila vždy iba v radiálnom smere, tak celý pohyb planéty prebieha iba v rovine určenej vektormi $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{v}_0$. Preto postačí úlohu riešiť iba v 2 rozmeroch. Dokonca to znamená, že výsledok tejto úlohy neplatí len pre gravitačné zákony v troch rozmeroch, ale platí aj pre viacrozmerné priestory.

Keďže je úloha radiálne symetrická, ideálne je ju popísať v polárnych súradniciach r a φ . Pre popis Newtonových zákonov v týchto súradniciach máme 2 možnosti:

- začneme s popisom v karteziánskych súradniciach x a y a následne transformujeme diferenciálne rovnice pri zmene súradníc,
- použijeme lagrangian L vo všeobecných súradniciach a aplikujeme Eulerove-Lagrangeove rovnice, aby sme dostali pohybové rovnice.

Lagrangian $L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t)$ vo všeobecnosti závisí od zovšeobecnených súradníc (v našom prípade polomer r a uhol φ), ich časových derivácií ("rýchlosti") a času t . Pre hmotný bod je definovaný ako rozdiel kinetickej energie T a potenciálu V

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t) = T - V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - V(r). \quad (2.1)$$

Pohybové rovnice (Eulero-Lagrangeove rovnice) sú potom pre všetky zovšeobecnené súradnice q v tvare

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (2.2)$$

Pre polárne súradnice r a φ dostaneme tieto pohybové rovnice

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - V'(r), \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (2.3)$$

Druhá rovnica je zákon zachovania momentu hybnosti v polárnych súradniciach. Môžeme teda napísať, že výraz v zátvorke (moment hybnosti) je konštanta L (nazýva sa aj konštanta pohybu).

$$mr^2\dot{\varphi} = L \quad \implies \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}. \quad (2.4)$$

Prvá rovnica nám poskytne pohybovú rovnicu v radiálnom smere

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - V'(r). \quad (2.5)$$

Dokázali sme teda niekoľko-rozmernú úlohu zredukovať na problém v jednom rozmere. Táto jednorozmerná pohybová rovnica sa dá interpretovať ako pohyb hmotného bodu o hmotnosti m v súradnici r v poli sily $F(r) := \frac{L^2}{mr^3} - V'(r)$. Preintegrovaním sily dostaneme efektívny potenciál $W(r)$

$$W(r) := - \int F(r) dr = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (2.6)$$

Tvar efektívneho potenciálu $W(r)$ určuje povahu pohybu planéty okolo Slnka. Môže obsahovať údolia (konvexné časti funkcie), v ktorých sa planéta môže zaseknúť a bude oscilovať tam a späť. Môže zároveň obsahovať pokles potenciálu do nekonečna/do stredu a planéta opustí Slnečnú sústavu alebo padne do Slnka. Vidíme však, že pokiaľ nepôjde potenciál $V(r)$ asymptoticky do mínus nekonečna pre $r = 0$, tak planéta nemôže padnúť do Slnka, lebo bude vždy odvrátená "odstredivým potenciálom" $\sim \frac{1}{r^2}$.

Skúsime najprv preskúmať kruhové dráhy a skoro kruhové dráhy. Zvoľme si dráhu s polomerom r_0 . Aby bola kruhová, jej polomer sa nesmie meniť a dostaneme teda podmienku

$$m\ddot{r} = 0 \quad \implies \quad \frac{L^2}{mr_0^3} = V'(r_0). \quad (2.7)$$

To zodpovedá vyrovnaní gravitačnej sily V' a odstredivej sily $\frac{L^2}{mr_0^3} = \frac{mv_0^2}{r_0}$. Zároveň táto rovnica zodpovedá nulovej derivácii efektívneho potenciálu $W(r)$

$$W'(r_0) = -F(r_0) = -\frac{L^2}{mr_0^3} - V'(r_0) = 0. \quad (2.8)$$

Kruhové dráhy sú teda v potenciáli W miesta s nulovou deriváciou. Ak je to lokálne minimum (funkcia W je v tomto bode konvexná), tak si vieme predstaviť v tomto bode malé kmity. Toto bude zodpovedať skoro kruhovým dráham. Ak však ide o lokálne maximum (funkcia W je v tomto bode konkávna), tak je to nestabilná pozícia a malá výchylka hociktorým smerom pošle planétu "dole" potenciálom. Pre úplnosť ešte môže ísť o inflexný bod. Vtedy je to takisto nestabilná pozícia a malá výchylka pošle planétu "dole" potenciálom.

Predpokladajme, že môžeme nájsť skoro kruhovú dráhu v okolí kruhovej dráhy r_0 . Tak pre malé vychýlenia δr môžeme písať

$$r = r_0 + \delta r \quad \implies \quad m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - V'(r) = \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{3L^2}{mr_0^4}\delta r - V'(r_0) - V''(r_0)\delta r + O(\delta r) \quad (2.9)$$

$$m\ddot{\delta r} = -\left(\frac{3L^2}{mr_0^4} + V''(r_0)\right)\delta r + O(\delta r). \quad (2.10)$$

Ak máme veľmi malé kmity, všetky vyššie rády v $O(\delta r)$ môžeme zanedbať a dostaneme rovnicu pre harmonické kmity. Uhlová frekvencia týchto kmitov Ω je

$$\Omega = \sqrt{\frac{3L^2}{m^2r_0^4} + \frac{V''(r_0)}{m}}. \quad (2.11)$$

Zatiaľ čo planéta osciluje v radiálnom smere s uhlovou frekvenciou Ω , tak sa otáča okolo Slnka s uhlovou frekvenciou $\omega = \dot{\varphi} = \frac{L}{mr_0^2}$. Ak by platilo $\Omega = \omega$, tak pri jednej rotácii okolo Slnka sa dokončí jeden kmit a planéta sa dostane do toho istého bodu, čím dostaneme periodickú dráhu. Rovnako, ak by platilo $\Omega = 2\omega$, tak za jednu rotáciu okolo Slnka urobí planéta 2 kmity a dostane sa do toho istého bodu. A podobne, ak by platilo $2\Omega = \omega$, tak po 2 rotáciách okolo Slnka urobí planéta jeden kmit a dostane sa do toho istého bodu. Vo všeobecnosti, ak platí $m\Omega = n\omega$ pre nejaké prirodzené čísla m a n , tak dosiahneme periodicitu pre skoro kruhovú dráhu. Preto pre nejaké racionálne číslo $z := \frac{n}{m}$ môžeme písať

$$\Omega = z\omega$$

$$\frac{3L^2}{m^2r_0^4} + \frac{V''(r_0)}{m} = z^2 \frac{L^2}{m^2r_0^4}.$$

Skoro však pozorujeme, že parameter z pre dráhy okolo r_0 musí byť rovnaká konštanta pre všetky polomery r . Ak by pre polomer $r_0 - \delta$ mali skoro kruhovú dráhu parameter z_1 a pre polomer $r_0 + \delta$ mali skoro kruhovú dráhu parameter z_2 , tak by sme vedeli zvoliť také malé kmity, ktoré by zasahovali do oblasti oboch polomerov. A pre takú dráhu by neexistoval jednoznačný parameter z , jedine v prípade, že parameter z je konštantný pre všetky polomery r . Môžeme teda všeobecne písať pre všetky polomery r

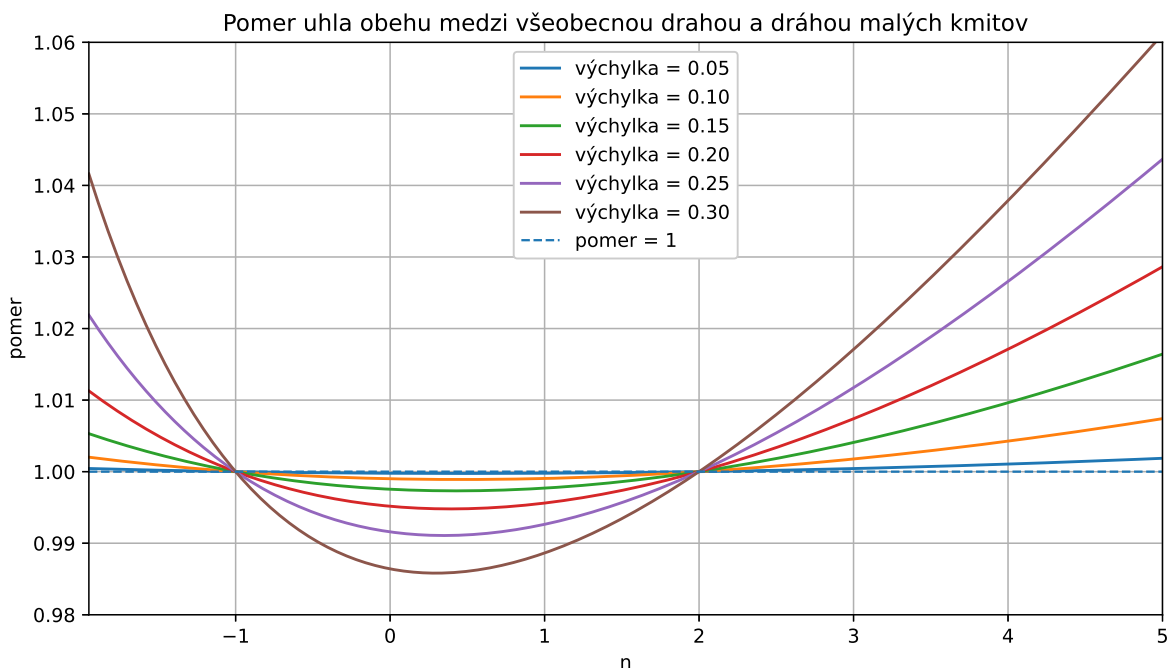
$$\frac{(3 - z^2)L^2}{mr^4} = -V''(r), \quad (2.12)$$

Dosadením vzťahu pre $L = \sqrt{mr^3 V'(r)}$ dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{(3 - z^2)}{r} = -\frac{V''}{V'} \implies -\ln V' = (3 - z^2) \ln r + C \implies V'(r) = Ar^{z^2-3} \implies V(r) = Br^{z^2-2} + D. \quad (2.13)$$

Dostali sme teda, že rodina všetkých možných riešení sa výrazne zúžila na funkcie mocninového rádu $V \sim r^n$, kde exponent $n > -2$ priamo určuje periodicitu dráh cez parameter z .

Zatiaľ sme preskúmali kruhové a skoro kruhové dráhy. Čo sa však stane pre všeobecné dráhy? Budú existovať periodické dráhy pre všetky hodnoty $n > -2$ alebo iba pre niektoré hodnoty (foreshadowing)? Predtým, ako niečo analyticky odvodíme, je veľmi užitočné sa pozrieť na numerické simulácie, aby sme dostali predstavu o probléme. Ak si urobíme simuláciu planéty pre hocikáký potenciál mocninového rádu, tak zistíme, že pre všeobecné dráhy väčšinou nedostaneme periodické dráhy. V grafe vidíme pomer uhla obehu po jednom kmite v radiálnom smere medzi všeobecnou dráhou (s nejakou počiatočnou výchylkou) a dráhou malých kmitov. Ak by bol parameter z rovnaký pre všetky dráhy, tak tento pomer musí byť 1. Numericky pozorujeme, že pre povolené hodnoty ($n > -2$) je pomer nemenný iba pre hodnoty $n = -1$ a $n = 2$. Znamená to, že naše zužovanie podmienok na potenciál V sa ešte neskončilo.



Obrázok 2.1: Závislosť pomeru uhla obehu po jednom kmite v radiálnom smere medzi všeobecnou dráhou a dráhou malých kmitov na parametri n a výchylke.

Nájsť analytické riešenie všeobecnej dráhy pre hocikákú hodnotu n je nemožné.³ Nájsť analytické riešenie konkrétnej nekruhovej dráhy pre hocikákú hodnotu n bude podobne náročné. Preto si budeme musieť pomôcť so skoro

³Ak sa obmedzíme na trigonometrické funkcie, tak riešenia existujú iba pre hodnoty $n \in \{-2, -1, 2\}$ (Cotesove špirály, klasická gravitácia a klasický oscilátor). Ak pridáme ešte eliptické funkcie, tak pribudnú hodnoty $n \in \{-6, -4, -3, 1, 4, 6, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\}$. Viac na anglickej Wikipédii.

kruhovými dráhami, ale budeme musieť vypočítať nelineárne korekcie ku skoro kruhovým dráham, aby sme zachovali periodicitu. Štandardne sa tento nástroj nazýva **poruchová teória** (anglicky *perturbation theory*), ale nie je to nič iné, ako "rozklad problému do Taylorovho rozvoja". Na vyššej úrovni sa dá hlavná myšlienka zhrnúť takto: Nech X je celé všeobecné riešenie, tak to sa dá potom rozvinúť v nejakom parametri ε ako

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \varepsilon^3 X_3 + \dots, \quad (2.14)$$

kde X_0 je presne známe základné riešenie (hlavný príspevok), X_1 je lineárna korekcia (korekcia do 1. rádu) ku základnému riešeniu a X_2, X_3 atď. sú nelineárne vyššie korekcie (korekcie 2. rádu, 3. rádu atď.). Táto myšlienka sa dá aplikovať vo veľa rôznorodých problémov. Typický príklad je výpočet kmitov reálneho kyvadla. X_0 zodpovedá riešeniu, keď je kyvadlo v stabilnej polohe $\varphi(t) = \varphi_0$. X_1 zodpovedá riešeniu lineárnych kmitov okolo stabilnej polohy $\varphi(t) = \varphi_0 + A \sin(\omega t + \phi_0)$, kde parameter A je amplitúda a zároveň hrá rolu parametera ε , v ktorom robíme rozvoj poruchovej teórie. Ak chceme vedieť periódu nelineárnych kmitov do 2. rádu, tak budeme riešiť rovnicu kmitov a hľadať riešenie $\varphi(t) = \varphi_0 + A \sin(\omega t + \phi_0) + A^2 f(t)$, kde budeme hľadať korekciu 2. rádu $f(t)$. Rovnaký postup môžeme zvoliť v našom prípade.

Najprv však skúsime preformulovať náš problém. Nebudeme sa pozeráť na pohyb planéty ako na časovú funkciu polomeru $r(t)$, ale ako na uhlovú funkciu $r(\varphi)$.

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{L}{mr^2} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -\frac{2L}{mr^3} \frac{dr}{dt} = -\frac{2L}{mr^3} \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2L^2}{m^2 r^5} \frac{dr}{d\varphi} \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{d\varphi} \right) = \frac{d^2r}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ &= \frac{d^2r}{d\varphi^2} \frac{L^2}{m^2 r^4} - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{2L^2}{m^2 r^5} \end{aligned}$$

Dosadením do pohybovej rovnice dostaneme

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} \frac{L^2}{m^2 r^4} - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{2L^2}{m^2 r^5} = \frac{L^2}{mr^3} - Ar^{z-3}, \quad (2.15)$$

Po preznačení a preškálovaní máme nelineárnu diferenciálnu rovnicu

$$r'' - 2r'^2 \frac{1}{r} = r - \frac{Am}{L^2} r^{1+z^2}, \quad (2.16)$$

Pri radiálnom pohybe hmotného bodu často pomôže substitúcia v tvare $u = \frac{\alpha}{r}$.

$$r = \alpha \frac{1}{u}, \quad r' = -\alpha \frac{u'}{u^2}, \quad r'' = -\alpha \frac{u''}{u^2} + 2\alpha \frac{u'^2}{u^3}. \quad (2.17)$$

Dostaneme

$$u'' = \frac{Am\alpha^{z^2}}{L^2} u^{1-z^2} - u. \quad (2.18)$$

Vhodným zvolením konštanty α vieme vždy zvoliť $\frac{A\alpha\alpha^2}{L^2} = 1$ a rovnica sa zjednoduší na

$$u'' = u^{1-z^2} - u. \quad (2.19)$$

Vo všeobecnosti, nájsť analytické riešenie pre nelineárnu diferenciálnu rovnicu je otázka šťastia a sme odkázaní iba na numerické riešenia. My však nemusíme hľadať všetky riešenia, postačí nám preskúmať niektoré riešenia. Z numerických experimentov vidíme, že aj keď začneme so skoro kruhovými dráhami, tak vyššie korekcie spôsobia, že dráhy nie sú periodické. Skúsme to preskúmať analyticky.

Majme skoro kruhovú dráhu. Vtedy uhol otočenia planéty sa s časom mení ako $\varphi(t) = \omega t$. Vzdialenosť planéty sa riadi frekvenciou kmitov a s časom sa mení ako $r(t) = f(\Omega t)$, kde funkcia f je nejaká periodická funkcia s periódou 2π . Keďže uhlová frekvencia ω je previazaná s frekvenciou kmitov Ω cez vzťah $\Omega = z\omega$, tak môžeme pre dráhy planéty písať $r(\varphi) = f(z\varphi)$. Keď prejdeme k novej premennej $u(\varphi)$, tak je periodická vlastnosť funkcie zachovaná a platí, že $u(\varphi) = g(z\varphi)$, kde $g(\cdot) = \frac{c}{f(\cdot)}$ je znova nejaká periodická funkcia s periódou 2π .

Ak je však funkcia $u(\varphi)$ periodická, vieme napísať pre ňu tvar v podobe Fourierového radu. Môžeme si zvoliť tvar používajúci komplexné exponenciály $e^{ijz\varphi}$,

$$u(\varphi) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j e^{ijz\varphi}, \quad (2.20)$$

kde A_j sú vo všeobecnosti komplexné čísla. Alebo rovnako ekvivalentne môžeme použiť rad s funkciami sínus a kosínus

$$u(\varphi) = c_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \cos(jz\varphi) + \sum_{j=1}^{+\infty} b_j \sin(jz\varphi), \quad (2.21)$$

kde c_0 , a_j a b_j sú reálne čísla. Oba zápisy sú ekvivalentné a môžeme medzi nimi prechádzať podľa potreby. Keď použijeme vzťahy na prechod od exponenciál ku kosínusu a sínusu

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (2.22)$$

tak vieme odvodiť prevodové vzťahy medzi koeficientami

$$c_0 = A_0, \quad a_j = A_j + A_{-j}, \quad b_j = i(A_j - A_{-j}), \quad (2.23)$$

$$A_0 = c_0, \quad A_j = \frac{1}{2}(a_j - ib_j), \quad A_{-j} = \frac{1}{2}(a_j + ib_j), \quad (2.24)$$

Keďže koeficienty c_0 , a_j a b_j sú reálne čísla, tak priamo dostaneme obmedzenie na komplexné čísla $A_j = A_{-j}^*$.

Keďže spôsob merania uhla φ je arbitrárny, môžeme ho zvoliť tak, aby polpriamka $\varphi = 0$ prechádzala najvzdialenejším/najbližším bodom dráhy planéty. Znamená to, že funkcia $u(\varphi)$ musí byť párna funkcia, $u(+\varphi) = u(-\varphi)$, lebo obeh v kladnom smere $+\varphi$ bude zrkadlovo nasledovať obeh v zápornom smere $-\varphi$. To však znamená, že všetky koeficienty b_j pre nepárne funkcie v rade (sínusy) sú nulové a funkcia sa zjednoduší na tvar

$$u(\varphi) = c_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \cos(jz\varphi). \quad (2.25)$$

Prevodové vzťahy sa zjednodušia na

$$c_0 = A_0, \quad a_j = 2A_j, \quad b_j = 0, \quad (2.26)$$

$$A_0 = c_0, \quad A_j = \frac{1}{2}a_j, \quad A_{-j} = \frac{1}{2}a_j, \quad (2.27)$$

Keď sme si nachystali rovnicu, ktorú budeme riešiť, (rovnica (2.19)) a tvar riešenia, môžeme sa postupne pozrieť na tri kroky poruchovej teórie. Preskúmame tri druhy dráh:

1. kruhové dráhy (základné riešenie bez poruchy),
2. skoro kruhové dráhy (lineárne kmity - riešenie s lineárnym príspevkom),
3. všeobecnejšie kruhové dráhy (nelineárne kmity - riešenie s korekciami vyšších rádov).

Kruhové dráhy

Keď máme kruhové dráhy, tak platí $u(\varphi) = u_0$. Dosadením do rovnice (2.19) dostaneme

$$0 = u_0^{1-z^2} - u_0. \quad (2.28)$$

Pre $z \neq 1$ a pozitívne hodnoty u_0 máme iba jedno riešenie $u_0 = 1$. Rovnako pre $z = 1$ dostaneme iba jedno riešenie $u_0 = 1$. Môžeme teda povedať, že pôvodná vzdialenosť r_0 je pomocou parametra c vždy preškálovaná v priestore u na hodnotu 1. Toto je naše základné riešenie bez poruchy.

Skoro kruhové dráhy (lineárne kmity)

V lineárnom režime zanedbávame všetky členy vyššie ako lineárne. Ak dosadíme do rovnice (2.19) tvar $u(\varphi) = 1 + \delta u(\varphi)$ a zanedbáme všetky členy väčšie ako δu , tak dostaneme

$$\begin{aligned} \delta u'' &= (1 + \delta u)^{1-z^2} - (1 + \delta u) \\ &= (1 + (1 - z^2)\delta u) - (1 + \delta u) \\ &= -z^2 \delta u. \end{aligned}$$

Tým dostaneme rovnicu kmitov s riešením v tvare $u(\varphi) = 1 + a_1 \cos(z\varphi)$, kde a_1 je malé číslo. Parameter a_1 hrá rolu parametra, v ktorom budeme robiť rozvoj. Zmenou hodnoty a_1 môžeme prechádzať medzi jednotlivými dráhami. Pre $a_1 = 0$ dostaneme späť popis kruhových dráh (základné riešenie).

Všeobecnejšie kruhové dráhy (nelineárne kmity)

Ak povolíme vyššie ako lineárne členy, dostaneme popis nelineárnych kmitov, čo nám pomôže s popisom všeobecnejších dráh. Začneme so všeobecným tvarom $u(\varphi)$

$$u(\varphi) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j e^{ijz\varphi}, \quad (2.29)$$

Tak ako pri lineárnych kmitoch, dostaneme celú rodinu funkcií medzi ktorými môžeme prechádzať zmenou jedného parametra (zvyčajne je to amplitúda alebo podobný parameter). Aby sme potom mohli dostať popis, ktorý

bude konzistentný so skoro kruhovými dráhami, tak si za tento parameter zvolíme A_1 . Jedna hodnota A_1 by mala jednoznačne určiť konkrétnu dráhu a keď pošleme parameter A_1 medzi malé hodnoty, mali by sme dostať popis lineárnych kmitov. Musí teda platiť, že ak zvolíme $A_1 \ll 1$, tak musíme dostať

$$A_0 \rightarrow 1, \quad A_1 = A_{-1} = \frac{a_1}{2}, \quad A_{2,3,4,\dots} \rightarrow 0 \quad A_{-2,-3,-4,\dots} \rightarrow 0, \quad (2.30)$$

aby sme dostali konzistentné riešenie s lineárnymi kmitmi.

Aby sme lepšie vedeli rozlíšiť veľkosť jednotlivých koeficientov, zdefinujeme si nové

$$A_0 = 1 + A'_0, \quad A_1 = A'_1, \quad A_2 = A'_2, \dots, \quad (2.31)$$

a funkciu $u(\varphi)$ vieme zapísať ako

$$u(\varphi) = 1 + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A'_j e^{ijz\varphi}. \quad (2.32)$$

Vieme, že pokiaľ ide o rády, tak musí platiť

$$1 \gg A'_1 \gg A'_0, A'_2, A'_3, \dots \quad (2.33)$$

Zatiaľ nevieme, aký je vzťah medzi koeficientami $A'_0, A'_2, A'_3, \dots$ pokiaľ ide o rády.

Pravá strana rovnice (2.19) je jednoduchá, keďže postačí aplikovať druhú deriváciu na každý člen radu a dostaneme

$$u''(\varphi) = - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j^2 z^2 A'_j e^{ijz\varphi}. \quad (2.34)$$

Pre ľavú stranu je potrebné aplikovať Taylorov rozvoj funkcie $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{i} x^i = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots \quad (2.35)$$

Dosadením všetkých vzťahov dostaneme

$$\begin{aligned} - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j^2 z^2 A'_j e^{ijz\varphi} &= - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A'_j e^{ijz\varphi} + (1-z^2) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A'_j e^{ijz\varphi} + \\ &+ \frac{(1-z^2)(-z^2)}{2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A'_j A'_k e^{i(j+k)z\varphi} + \\ &+ \frac{(1-z^2)(-z^2)(-1-z^2)}{6} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A'_j A'_k A'_l e^{i(j+k+l)z\varphi} + \dots \end{aligned}$$

Na prvý pohľad to vyzerá ako veľmi komplikovaná rovnica a nikam sme sa neposunuli. Ale v tejto rovnici sa skrýva nekonečné množstvo rovníc, keďže $e^{ijz\varphi}$ sú si navzájom nezávislé. Vybraním koeficientov pred jednotlivými funkciami $e^{ijz\varphi}$ dostaneme vzájomné rovnice pre koeficienty.

Pre $e^{i0z\varphi} = 1$, dostaneme rovnicu

$$0 = -A'_0 + (1 - z^2)A'_0 + \frac{(1 - z^2)(-z^2)}{2} \begin{pmatrix} \dots \\ +A'_{-2}A'_2 \\ +A'_{-1}A'_1 \\ +A'_0A'_0 \\ +A'_1A'_{-1} \\ +A'_2A'_{-2} \\ \dots \end{pmatrix} + \frac{(1 - z^2)(-z^2)(-1 - z^2)}{6} \begin{pmatrix} \dots \\ +A'_{-1}A'_0A'_1 \\ +A'_{-1}A'_1A'_0 \\ +\dots + \\ +A'_0A'_{-1}A'_1 \\ +A'_0A'_0A'_0 \\ +A'_0A'_1A'_{-1} \\ +\dots + \\ +A'_1A'_{-1}A'_0 \\ +A'_1A'_0A'_1 \\ \dots \end{pmatrix} + \dots \quad (2.36)$$

Keď porovnáme jednotlivé členy a ich rády, tak veľmi skoro zistíme, že väčšina členov sa dá zanedbať, keďže v rovnici existuje člen nižšieho rádu. Iba zvýraznené členy v stĺpcoch sú dostatočného rádu, aby neboli zanedbané. Rovnica sa zjednoduší na

$$0 = -A'_0 + (1 - z^2)A'_0 + (1 - z^2)(-z^2)A_1'^2 \implies A'_0 = -(1 - z^2)A_1'^2. \quad (2.37)$$

Vieme teda, že koeficient $A'_0 \sim A_1'^2$ rastie kvadraticky voči parametru A_1' .

Pre $e^{iz\varphi}$, dostaneme rovnicu

$$-A'_1 z^2 = -A'_1 + (1 - z^2)A'_1 + \frac{(1 - z^2)(-z^2)}{2} \begin{pmatrix} \dots \\ +A'_{-2}A'_3 \\ +A'_{-1}A'_2 \\ +A'_0A'_1 \\ +A'_1A'_0 \\ +A'_2A'_{-1} \\ +A'_3A'_{-2} \\ \dots \end{pmatrix} + \frac{(1 - z^2)(-z^2)(-1 - z^2)}{6} \begin{pmatrix} \dots \\ +A'_{-1}A'_0A'_2 \\ +A'_{-1}A'_1A'_1 \\ +A'_{-1}A'_2A'_0 \\ +\dots + \\ +A'_0A'_{-1}A'_2 \\ +A'_0A'_0A'_1 \\ +A'_0A'_1A'_0 \\ +A'_0A'_2A'_{-1} \\ +\dots + \\ +A'_1A'_{-2}A'_2 \\ +A'_1A'_{-1}A'_1 \\ +A'_1A'_0A'_0 \\ +A'_1A'_1A'_{-1} \\ +A'_1A'_2A'_{-2} \\ \dots \end{pmatrix} + \dots \quad (2.38)$$

Podobne ako predtým, väčšina členov sa dá zanedbať, keďže v rovnici existuje člen nižšieho rádu. Ponechaním zvýraznených členov dostaneme

$$0 = (1 - z^2)(-z^2)A'_1(A'_0 + A'_2) + \frac{(1 - z^2)(-z^2)(-1 - z^2)}{2}A_1'^3. \quad (2.39)$$

Pre $e^{2iz\varphi}$, dostaneme rovnicu

$$-4A_2'z^2 = -A_2' + (1 - z^2)A_2' + \frac{(1 - z^2)(-z^2)}{2} \begin{pmatrix} \dots \\ +A_{-1}'A_3' \\ +A_0'A_2' \\ +A_1'A_1' \\ +A_2'A_0' \\ +A_3'A_{-1}' \\ \dots \end{pmatrix} + \frac{(1 - z^2)(-z^2)(-1 - z^2)}{6} \begin{pmatrix} \dots \\ +A_{-1}'A_0'A_3' \\ +A_{-1}'A_1'A_2' \\ +A_{-1}'A_2'A_1' \\ +A_{-1}'A_3'A_0' \\ +\dots + \\ +A_0'A_{-1}'A_3' \\ +A_0'A_0'A_2' \\ +A_0'A_1'A_1' \\ +A_0'A_2'A_0' \\ +A_0'A_3'A_{-1}' \\ +\dots + \\ +A_1'A_{-1}'A_2' \\ +A_1'A_0'A_1' \\ +A_1'A_1'A_0' \\ +A_1'A_2'A_{-1}' \\ \dots \end{pmatrix} + \dots \quad (2.40)$$

Prekvapivo, zo všetkých členov v rozvoji zostane iba jeden výrazný člen a nakoniec dostaneme

$$-3A_2'z^2 = \frac{(1 - z^2)(-z^2)}{2}A_1'^2 \implies A_2' = \frac{1}{6}(1 - z^2)A_1'^2. \quad (2.41)$$

Vieme teda, že koeficient $A_2' \sim A_1'^2$ rastie kvadraticky voči parametru A_1' .

Pre $e^{3iz\varphi}$, dostaneme rovnicu

$$-9A_3'z^2 = -A_3' + (1-z^2)A_3' + \frac{(1-z^2)(-z^2)}{2} \begin{pmatrix} \dots \\ +A_0'A_3' \\ +A_1'A_2' \\ +A_2'A_1' \\ +A_3'A_0' \\ \dots \end{pmatrix} + \frac{(1-z^2)(-z^2)(-1-z^2)}{6} \begin{pmatrix} \dots \\ +A_0'A_0'A_3' \\ +A_0'A_1'A_2' \\ +A_0'A_2'A_1' \\ +A_0'A_3'A_0' \\ +\dots + \\ +A_1'A_0'A_2' \\ +A_1'A_1'A_1' \\ +A_1'A_2'A_0' \\ +\dots + \\ +A_2'A_{-1}'A_2' \\ +A_2'A_0'A_1' \\ +A_2'A_1'A_0' \\ +A_2'A_2'A_{-1}' \\ \dots \end{pmatrix} + \dots \quad (2.42)$$

Nakoniec dostaneme

$$-8A_3'z^2 = (1-z^2)(-z^2)A_1'A_2' + \frac{(1-z^2)(-z^2)(-1-z^2)}{6}A_1'^3 \quad (2.43)$$

Po dosadení vzťahu pre A_2' dostaneme

$$A_3' = -\frac{(1-z^2)z^2}{24}A_1'^3, \quad (2.44)$$

a zistíme, že koeficient $A_3' \sim A_1'^3$ rastie kubicky voči parametru A_1' .

Podobným postupom by sme ukázali, že vyššie koeficienty $A_4', A_5', \dots$ rastú s vyššími rádmi.

Vidíme teda, že ak budeme amplitúdu kmitov znižovať $1 \gg A_1'$, tak všetky členy $A_0', A_2', A_3', \dots$ zaniknú.

Ostala nám však jedna rovnica (rovnica (2.39)), ktorú sme nepoužili. Po dosadení dostaneme

$$0 = \frac{1}{3}(1-z^2)z^2(4-z^2)A_1'^3. \quad (2.45)$$

Znamená to, že aby boli nelineárne kmity periodické, tak potenciál musí spĺňať túto prísnu podmienku. Keďže z môžeme vždy zvoliť nezáporné, tak dostaneme iba 3 možné riešenia: $z = 0$, $z = 1$ a $z = 2$.

Takýto limitovaný zoznam možností už vieme preskúmať jednotlivo.

Prípad $z = 0$

Rovnica (2.18) sa zjednoduší na tvar

$$u'' = \left(\frac{Am}{L^2} - 1 \right) u. \quad (2.46)$$

Ak je konštanta $a = \frac{Am}{L^2} - 1$ v zátvorke záporná $a < 0$, tak dostaneme rovnicu kmitov a riešenie je súčet sínusu a kosínusu

$$u(\varphi) = u_0 \cos(\sqrt{a}\varphi) + A \sin(\sqrt{a}\varphi). \quad (2.47)$$

Skôr alebo neskôr planéta prejde do bodu $u = 0$, teda odletí do nekonečna.

Ak je konštanta a kladná $a > 0$, tak dostaneme rovnicu nestabilných kmitov a riešenie je súčet hypersínusu a hyperkosínusu (súčet dvoch exponenciál)

$$u(\varphi) = u_0 \cosh(\sqrt{a}\varphi) + A \sinh(\sqrt{a}\varphi). \quad (2.48)$$

Planéta buď odletí do nekonečna ($u = 0$) alebo padne do Slnka ($u = +\infty$).

Ak je konštanta a nulová $a = 0$, tak riešením sú lineárne funkcie

$$u(\varphi) = u_0 + A\varphi. \quad (2.49)$$

Tieto riešenia však nie sú periodické, jedine pre $a = 0$ kruhové dráhy. Ostatné dráhy buď letia do nekonečna alebo končia v nule. Žiadne dráhy nie sú stabilné. Keď chceme pochopiť, čo sa deje v skutočnom priestore, pozrieme sa na zodpovedajúci efektívny potenciál

$$W_{z=0}(r) = \left(B + \frac{L^2}{2m}\right) \frac{1}{r^2} + D. \quad (2.50)$$

Vidíme, že:

- buď je potenciál odpudivý ($B + \frac{L^2}{2m} > 0$) a dráhy sa rozletia do nekonečna,
- alebo je potenciál príťažlivý ($B + \frac{L^2}{2m} < 0$) a dráhy končia v Slnku,
- alebo je potenciál konštantný ($B + \frac{L^2}{2m} = 0$) a dráhy sú kruhové dráhy.

Posledný prípad nastáva iba pre vhodne zvolený moment hybnosti L a neplatí pre všetky orbity. Preto prípad $z = 0$ nespĺňa podmienku zo zadania.

Prípad $z = 1$

Rovnica (2.19) sa znova zjednoduší a dostávame

$$u'' = 1 - u = -(u - 1). \quad (2.51)$$

Všetky riešenia sú harmonické kmity s posunutým rovnovážnym bodom o 1

$$u(\varphi) = 1 + a_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (2.52)$$

Použitím transformácie medzi u a r nájdeme

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{Am} \frac{1}{1 + a_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (2.53)$$

Toto riešenie presne zodpovedá riešeniu pre pohyb planéty okolo Slnka v klasickej gravitácii

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (2.54)$$

kde ε je excentricita dráhy a $p = \frac{L^2}{m^2 GM}$ je parameter určujúci veľkosť dráhy. Čisto technicky pre $\varepsilon \geq 1$ dostávame parabolu a hyperbolu a planéta nebude vykonávať periodický pohyb, ale z geometrie dráhy je jasné, že ide o periodickú funkciu v parametri φ .

Potvrdili sme, že pre klasickú gravitáciu dostaneme periodické dráhy. Existuje ešte nejaké ďalšie riešenie?

Prípady $z = 2$

V tomto prípade dostaneme komplikovanú rovnicu

$$u'' = u^{-3} - u. \quad (2.55)$$

Ak sa však pozrieme na tvar funkcie potenciálu $V(r)$

$$V(r) = Br^2 + D \quad (2.56)$$

tak si môžeme všimnúť, že ide o potenciál dvojrozmerného harmonického potenciálu

$$V(r) = V(x, y) = B(x^2 + y^2) + D. \quad (2.57)$$

Keďže je konštanta pružnosti rovnaká v oboch smeroch, uhlová frekvencia kmitov ω je v oboch smeroch rovnaká

$$\omega = \sqrt{\frac{2B}{m}}. \quad (2.58)$$

V každom smere sú to 2 nezávislé kmity

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_{x,0}), \quad y(t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi_{y,0}). \quad (2.59)$$

Kombináciou týchto pohybov dostaneme elipsu (keďže ide o preškálovanú projekciu kruhu). Jediný rozdiel je ten, že Slnko sa nenachádza v ohnisku elipsy, ale v strede elipsy. Elipsa je v polárnych súradniciach popísaná rovnicou

$$r(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos(\varphi - \varphi_0)^2}}, \quad (2.60)$$

kde b je dĺžka vedľajšej polosi, ε je excentricita elipsy a φ_0 je uhol natočenia hlavnej osi. Ak chceme zistiť, ako toto riešenie vyzerá v súradnici u , musíme prísť na hodnotu momentu hybnosti L , aby sme vedeli vhodne zvoliť parameter α . Planéta má nejakú celkovú energiu. V smere hlavnej osi zastaví vo vzdialenosti a a preto energia v tomto móde je Ba^2 . V smere vedľajšej osi zastaví vo vzdialenosti b a energia v druhom móde je Bb^2 . Preto celková energia planéty je $E = B(a^2 + b^2)$. Ak má planéta celkovú energiu E , tak v efektívnom potenciáli $W(r)$

$$W(r) = Br^2 + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad (2.61)$$

bude táto energia zodpovedať dvom polomerom, kedy sa polomer zastaví. Menší bude zodpovedať vedľajšej polosi b a väčší bude zodpovedať veľkej polosi a . Dostaneme teda

$$a^2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - 2\frac{BL^2}{m}}}{2B}, \quad b^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - 2\frac{BL^2}{m}}}{2B}. \quad (2.62)$$

Z týchto rovníc vieme vyjadriť moment hybnosti L a dostaneme

$$L^2 = 2a^2b^2Bm. \quad (2.63)$$

V takom prípade je škálovací parameter α rovný

$$\alpha = \left(\frac{2L^2}{Bm}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}b}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}} \quad (2.64)$$

a riešenie v súradnici u vyzerá ako

$$u(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos(\varphi - \varphi_0)^2}. \quad (2.65)$$

Dosadením do rovnice (2.19) vieme overiť, že je to riešenie.

Výsledok úlohy je celkom prekvapivý. Sú iba 2 druhy potenciálov (klasická gravitácia $\sim \frac{1}{r}$ a viacrozmerný harmonický oscilátor $\sim r^2$), ktoré vedú na periodické orbity. Tento výsledok sa volá Bertrandova veta.

Poznámky ku riešeniu: Úloha sa dá riešiť aj iba v súradnici r a netreba prechádzať do priestoru súradnice u . Túto substitúciu sme použili iba preto, aby sme si zjednodušili tvar diferenciálnej rovnice. Rovnako sa dalo hľadať riešenie v tvare súčtu sínusov a kosínusov bez použitia Fourierového radu. Tento postup sme zvolili pre jednoduchosť. Takisto musíme povedať, že používanie myšlienky poruchovej teórie vie byť frustrujúce, keďže v nejakom momente sa rovnice veľmi rozkošatia a je náročné sa v nich zorientovať. Treba však dôverovať procesu a nakoniec sa rovnice zjednodušia (nakoniec sme dostali rovnice (2.37), (2.39), (2.41) a (2.43)). Zaujímavosťou si môžu tento postup vyskúšať na jednoduchšej úlohe (napr. reálne kyvadlo) a nájsť korekciu periódy kmitov.

Nad rámec tejto úlohy sa môžeme pýtať, prečo je to takto. Na základnej úrovni sme ukázali, že medzi mocninou v potenciáli n a parametrom z musí byť vzťah $n = z^2 - 2$ (pre skoro kruhové dráhy). Ak pôjdeme o úroveň nižšie, tak sme zistili, že pre všeobecné dráhy to platí iba pre 2 hodnoty $n \in \{-1, 2\}$. Ak pôjdeme zas o ešte jednu úroveň nižšie, tak je to kvôli tomu, že tieto dva systémy sú *maximálne superintegrabilné*.

Vysvetliť to je nad rámec strednej školy, ale môžeme ponúknuť približnú logiku a nadhľad, prečo to tak je. V klasickej mechanike sme si všimli, že keď sa v nejakom systéme pohybuje hmotný bod pozdĺž trajektórie, tak sa niekedy niektoré veličiny nemenia. Tieto premenné sa nazývajú *konštanty pohybu* alebo aj *integrály pohybu*. Typickým príkladom je celková energia E , hybnosť $\mathbf{p}$ alebo moment hybnosti $\mathbf{L}$. Neskôr Emma Noether došla na to, že existencia týchto konštánt nie je len tak náhodná. Ak existuje v systéme nejaký druh symetrie, tak každej z nich zodpovedá nejaký zákon zachovania nejakej veličiny - konštanty pohybu. Ak pohybové rovnice nezávisia na čase (symetria systému v čase), tak tomu zodpovedá zákon zachovania celkovej energie E . Ak sa pohybové rovnice nemenia pri posune v priestore (symetria systému pri translácii), tak tomu zodpovedá zákon zachovania hybnosti $\mathbf{p}$. Ak sa pohybové rovnice nemenia pri otočení v priestore (symetria systému pri rotácii), tak tomu zodpovedá zákon zachovania momentu hybnosti $\mathbf{L}$. Ešte neskôr vďaka príspevku viacerých fyzikov a matematikov sme zistili,

že celkový počet konštánt pohybu súvisí s usporiadaním systému. V skratke, ak má systém N stupňov voľnosti (počet parametrov, aby sme vedeli jednoznačne určiť polohu) a k konštánt pohybu, tak systémy vieme rozdeliť na:

- *neintegrateľné* ($k < N$): Aj keď počiatočné podmienky jednoznačne určujú trajektóriu pohybu, tak tieto systémy sú často chaotické (citlivé na počiatočné podmienky) a ich trajektórie nie sú zvyčajne uzavreté (teda ani periodické). Typickým príkladom neintegrateľného systému je dvojité matematické kyvadlo (kyvadlo zavesené na kyvadle). To má $N = 2$ stupne voľnosti (2 počiatočné uhly kyvadiel), ale iba jednu konštantu pohybu ($k = 1$) - celkovú energiu E . Kyvadlo sa správa chaoticky a je veľmi citlivé na počiatočné podmienky. Ďalší príklad: pohyb troch telies vo vzájomnom gravitačnom poli.
- *integrateľné* ($k = N$): Počiatočné podmienky jednoznačne určujú trajektóriu pohybu a aj konštanty pohybu pozdĺž tejto trajektórie, trajektórie už nie sú chaotické, sú stabilné, ale uzavretosť trajektórie nie je zaručená (typická vlastnosť je precesia). Príklad: pohyb telesa vo všeobecnom centrálnom poli.
- *superintegrateľné* ($k > N$): Väčší počet konštánt pohybu výraznejšie obmedzuje možné trajektórie, tie sú stabilné a často periodické. Príklad: anizotropický viacrozmerný harmonický oscilátor.
- *maximálne superintegrateľné* ($k = 2N - 1$): Maximálny počet konštánt pohybu bol dosiahnutý, trajektórie sú uzavreté, periodické, často analyticky riešiteľné a nemôžu byť chaotické. Prípady: izotropický viacrozmerný harmonický oscilátor, Calogero-Moser-Sutherlandov model, Smorodinskyho-Winternitzov model, Pöschlov-Tellerov potenciál (v kvantovej fyzike), Morseho potenciál (v kvantovej fyzike), Scarfov potenciál (v kvantovej fyzike).

V našom prípade máme pohyb bodu v radiálnom potenciáli. Ukázali sme, že o tomto probléme môžeme uvažovať ako o dvojrozmernom probléme a teda má prakticky 2 stupne voľnosti (počiatočné súradnice x a y , alebo počiatočná vzdialenosť r a uhol natočenia φ). Pre tento systém sa nemenia pohybové rovnice v čase (zákon zachovania energie E) a pri rotácii (zákon zachovania momentu hybnosti L), čo nám dáva práve 2 nezávislé konštanty pohybu ($k = 2$). To znamená, že vo všeobecnosti je tento systém integrateľný. Trajektórie sú stabilné a vidíme u nich precesiu. To platí až na 2 špeciálne prípady:

- Keď je potenciál klasický gravitačný potenciál $V = -\frac{K}{r}$, tak existuje tretia konštanta pohybu - Laplaceov-Rungeov-Lenzov vektor $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mK\hat{\mathbf{r}}$, ktorá sa v 2D verzii zjednoduší na jedno číslo. Vtedy je počet konštánt $k = 3$ väčší ako počet $N = 2$ stupňov voľnosti. Systém je maximálne superintegrabilný a preto sú trajektórie periodické.
- Keď je potenciál klasický oscilátor $V = \frac{1}{2}Kr^2$, tak existuje tretia konštanta pohybu - Fradkinov tenzor $F_{ij} = \frac{1}{2m}p_i p_j + \frac{1}{2}Kx_i x_j$, ktorý dodá tretiu konštantu pohybu, systém bude maximálne superintegrabilný a trajektórie periodické.

Takže na najnižšej úrovni vieme povedať, že iba keď má systém s radiálnym potenciálom nejakú symetriu navyše (pre $n \in \{-1, 2\}$), tak budú jeho trajektórie periodické.

1.3 Lego mal sklon

Zadanie. Lego má dosku naklonenú pod uhlom α voči rovnomernému smeru. Na tejto doske sa pohybuje hmotný bod. Medzi doskou a bodom je trenie s koeficientom statického trenia f_s a koeficientom dynamického trenia f_d . Platí $f_s > f_d$. Hmotnému bodu udelíme rýchlosť v_0 v rovine dosky a pod uhlom φ meraného voči smeru nahor po doske. Aká bude konečná rýchlosť bodu v závislosti od parametrov systému a od počiatočných podmienok?

Riešenie. (Autor riešenia: **Legó**)opravuje **Legó** (simon.pajger@trojsten.sk)

Označme si hmotnosť hmotného bodu m . Potom zložka tiaže tohto hmotného bodu v smere dosky je $F_k = mg \sin \alpha$, trecia sila počas šmýkania hmotného bodu po doske bude $F_d = f_d mg \cos \alpha$ a maximálna trecia sila (ku ktorej dochádza v statickej situácii) je $F_s = f_s mg \cos \alpha$. Nakoľko nás zaujíma hlavne či je F_k menšia alebo väčšia než jednotlivé trecie sily, podelíme si všetky 3 sily $mg \cos \alpha$ a dostávame, že podstatné sú bezrozmerné čísla $f_s, f_d, \tan \alpha$. Pričom vieme, že $f_s > f_d$, ale $\tan \alpha$ môže mať voči nim akúkoľvek veľkosť.

Triviálne prípady

Ak je trecia sila slabá ($\tan \alpha > f_s > f_d$), bod bude zrýchľovať donekonečna. Konkrétne dynamické trenie bude mať vždy veľkosť F_d a pôsobí proti smeru aktuálneho pohybu, čiže jeho zložka v smere dole kopcom bude $F_{d\parallel} \leq F_d$. Tým pádom, výslednica v smere dole kopcom bude $F_{\parallel} = F_k - F_{d\parallel} \geq F_k - F_d > 0$. Popri tom trecia sila v kolmom smere bude vždy hmotný bod v tomto smere brzdiť, akurát zložka trecej sily v kolmom smere bude asymptoticky klesať spolu so zložkou rýchlosti v tomto smere. Každopádne konečná rýchlosť za týchto podmienok je nekonečno smerom dole po rovine.

Ak je naopak trecia sila veľká $f_s > f_d > \tan \alpha$, hmotný bod bude vždy brzdený. Ak by šiel nahor po rovine, tak súčtom F_k a F_d , ak nadol, tak len ich rozdielom, ale tak ako tak časom zastaví a statické trenie ho už udrží a jeho konečná rýchlosť je teda nulová.

Veľké statické trenie

Ak $f_s > \tan \alpha > f_d$, tak nastáva otázka: zastaví sa hmotný bod niekedy počas svojho pohybu? Pretože ak nie, tak sa samozrejme zošmykne až dole, môžeme použiť tú istú argumentáciu ako v minulej sekcii. Lenže ak sa hmotný bod kedykoľvek počas svojho pohybu zastaví, už sa vďaka statickému treniu znova nerozbehne a jeho konečná rýchlosť bude 0.

Ak by sme brali, že rozbehnúť hmotný bod rýchlosťou $v_0 = 0$ je konzistentné so zadaním, tak vtedy sa bod nikdy nerozbehne a konečná rýchlosť bude nulová. Ak bod rozbehneme presne nahor ($\varphi = 0$), tak v hornom bode svojej trajektórie zastaví a zostane stáť. Naopak, ak bod rozbehneme viac nadol, než nahor ($\varphi > \pi/2$), zložka rýchlosti dole kopcom nikdy nebude klesať a teda konečná rýchlosť bude určite nekonečná.

Čo ale, ak bod rozbehneme pod uhlom $\varphi \in (0, \pi/2)$? Jedna možnosť je riešiť diferenciálne rovnice, nájsť nejaké "prúdnice" v priestore rýchlostí, po ktorých sa pohybuje vektor rýchlosti a hľadať, ktoré prechádzajú rýchlosťou $[0, 0]$ (niekomu je možno intuitívne aj bez riešenia, že taká prúdica bude práve jedna a síce tá pre $\varphi = 0$). Druhá možnosť je použiť nasledovnú úvahu: jediné nie bezrozmerné parametre sú g a v_0 . Od počiatočnej rýchlosti teda bude závisieť len to, do akej výšky sa bod dostane a za aký čas sa otočí, ale z g nemám ako určiť nejakú kritickú rýchlosť. Čiže to, či bod zastaví alebo nie, závisí len od počiatočného uhlu (a nie veľkosti rýchlosti). Tak keď odštartujem bod pod uhlom φ_1 a po čase t ide pod iným uhlom φ_2 , tak si vlastne viem predstaviť, že "teraz začínam" a teda ten aktuálny uhol φ_2 dopadne rovnako ako ten počiatočný φ_1 . Zostáva si uvedomiť, že pre všetky $\varphi > 0$ bude tento uhol s časom iba rásť (smer hmotného bodu sa bude od smeru nahor odkláňať), pretože trecia sila ide proti smeru (čiže by uhol nemenila), ale F_k znižuje iba zložku v smere nahor. Tým pádom bez ohľadu na to, pod akým uhlom a akou rýchlosťou začneme (ak teda budú jedno aj druhé nenulové), rýchlosť bude klesať a uhol bude rásť, dokým sa uhol nepreklopí cez $\pi/2$, potom rýchlosť bude zas rásť, ako sme si popisovali predtým.

Zhrnutie: ak $f_s > \tan \alpha > f_d$, potom pre $v_0 = 0$ alebo $\varphi = 0$ bude konečná rýchlosť hmotného bodu nulová, inak bude nekonečná v smere nadol po rovine.

Akurátne dynamické trenie

V prípade, že dynamické trenie a sklon roviny budú vo vzťahu $\tan \alpha = f_d$, tak veľkosť trecej sily bude rovnaká ako F_k čiže v asymptote, keď bod pôjde rovno dole doskou, sa presne vyrušia a bod pôjde nejakou konečnou a nenulovou rýchlosťou, poďme ju teda spočítať.

Označme si uhol, ktorý zvierá smer hmotného bodu so smerom dole po doske ako β (čiže na začiatku $\beta = \pi - \varphi$). Potom sily F_d a F_k zvierajú uhol $\pi - \beta$. Keďže majú tieto dve sily rovnakú veľkosť, ich výslednica pôjde po ose ich uhla, čiže so smerom dole po rovine bude zvierat $\pi/2 - \beta/2$ a so smerom hmotného bodu bude tým pádom zvierat uhol $(\pi/2 - \beta/2) + \beta = \pi/2 + \beta/2$.

Za krátky čas dt sa rýchlosť zmení o vektor veľkosti adt v tomto smere, čo sa prejaví na zmene uhla aj zmene veľkosti rýchlosti. Konkrétne si môžeme zmenu rýchlosti rozložiť na zložku v smere rýchlosti $-adt \sin \beta/2$, ktorá bude zodpovedná za zmenu veľkosti, a v smere kolom na rýchlosť $adt \cos \beta/2$ zodpovednú za zmenu smeru

$$dv = -adt \sin \beta/2, d\beta = -adt \frac{\cos \beta/2}{v}, \quad (3.1)$$

môžeme z oboch vzťahov vyjadriť adt , čím dostaneme diferenciálnu rovnicu pre veľkosť a smer rýchlosti

$$\frac{dv}{\sin \beta/2} = \frac{d\beta v}{\cos \beta/2}, \quad (3.2)$$

ktorú vyriešime metódou separácie

$$\int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{v} = \int_{\pi-\varphi}^0 \tan \frac{\beta}{2} d\beta, \quad (3.3)$$

kde pod v_f myslíme výslednú rýchlosť, keď bod pôjde smerom dole po doske. Zintegrovaním dostávame

$$\ln \frac{v_f}{v_0} = 2 \ln \cos \frac{\pi - \varphi}{2} \rightarrow v_f = v_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (3.4)$$

kde sme využili, že logaritmus je primitívna funkcia a že $\cos^2$ a $\sin^2$ sú voči sebe posunuté o $\pi/2$.

Z predzadzajúcej časti už vieme, že tento výsledok platí pre všetky uhly okrem prípadu $\varphi = 0$, kedy sa bod zastaví v hornom bode svojej trajektórie, lenže keď do nášho výsledku dosadíme $\varphi = 0$, vidíme, že aj pre tento uhol dáva správny výsledok.

Alternatívne riešenie

Ak si zadefinujeme v rovine dosky súradnice x (horizontálny smer) a y (po doske smerom nahor), tak vieme zo síl napísať diferenciálne rovnice pre vektor rýchlosti (v_x, v_y) .

$$\frac{1}{g} \dot{v}_x = -f_d \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{g} \dot{v}_y = -f_d \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - \tan \alpha \quad (3.6)$$

Pravá strana určuje vektorové pole v priestore rýchlostí (v_x, v_y) a vektor rýchlosti nasleduje trajektóriu podľa tohto poľa. Ak je toto vektorové pole interpretovateľné ako gradient nejakého potenciálu, tak nám to uľahčí uvažovanie o pohybe vektorového poľa. Keďže rotácia tohto poľa je nulová, tak sa dá nájsť potenciál poľa $\Phi(v_x, v_y)$

$$\Phi(v_x, v_y) = f_d \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + \tan \alpha v_y \quad (3.7)$$

a pohybová rovnica sa dá zjednodušiť na

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = -g \nabla \Phi. \quad (3.8)$$

Tvar potenciálu sa dá ľahko predstaviť. Prvá časť $(\sqrt{v_x^2 + v_y^2})$ tvorí kužeľ s minimom v bode $(0, 0)$. Druhá časť (v_y) je rovina naklonená v ypsilonovom smere.

V závislosti od parametrov f_d a $\tan \alpha$ vieme rozlíšiť tri možnosti:

- Pre $f_d > \tan \alpha$, je súčet oboch častí kladný potenciál pre všetky smery s minimom nula v bode $(0, 0)$. Teda, bez ohľadu na to s akou rýchlosťou $\mathbf{v}_0$ začneme, gradient nás vždy privedie do minima, teda nulovej rýchlosti.
- Pre $f_d < \tan \alpha$, súčet oboch častí tvorí potenciál bez minima. Potenciál v smere $v_y \rightarrow -\infty$ ide do mínus nekonečna. Ak začneme na kladnej osi y ($0, v_y > 0$), tak nás gradient privedie do bodu $(0, 0)$, kde sa bod zastaví. Ak však začneme hocikde inde, tak gradient pôsobí vždy preč od kladnej ypsilonovej osi. Znamená to, že uhol medzi kladnou osou y a vektorom rýchlosti sa bude vždy zväčšovať. Zároveň musíme klesať dole po potenciáli. Preto všetky ostatné rýchlosti budú pokračovať do nekonečna a konečná rýchlosť bude nekonečná.
- Pre $f_d = \tan \alpha$, máme špeciálny prípad. Súčet oboch častí tvorí kladný potenciál s minimami (hodnoty nula) pozdĺž negatívnej osi y ($0, v_y < 0$). Konečná rýchlosť teda môže byť hocikaká z týchto hodnôt. Aká je konečná rýchlosť, závisí od počiatočnej rýchlosti.

Na nájdenie konečnej rýchlosti pre tretí prípad môžeme použiť metódu **hľadania invariantu**. Pre $f_d = \tan \alpha$ sa pohybová rovnica zjednoduší na tvar

$$\frac{1}{f_d g} \dot{v}_x = -\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{f_d g} \dot{v}_y = -\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - 1. \quad (3.10)$$

Ak prejdeme k polárnym súradniciam v, φ , tak dostaneme

$$\frac{1}{f_d g} \dot{v} = -(1 + \cos \varphi) \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{f_d g} \dot{\varphi} = -\frac{1}{v} \sin \varphi. \quad (3.12)$$

Pre x-ovú a y-ovú zložku vieme zároveň písať

$$\frac{1}{f_d g} \dot{v}_x = -\sin \varphi \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{f_d g} \dot{v}_y = -\cos \varphi - 1. \quad (3.14)$$

Môžeme si všimnúť, že ak vytvoríme novú premennú $K := v - v_y$, tak tá sa počas pohybu nemení.

$$\dot{K} = \dot{v} - \dot{v}_y = 0. \quad (3.15)$$

Vytvorili sme teda invariant (konštantu pohybu). Táto hodnota musí byť rovnaká na začiatku a aj na konci. Ak teda začíname s rýchlosťou v_0 pod uhlom φ , tak invariant K je

$$K = v_0(1 - \cos \varphi) = 2v_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.16)$$

Na konci skončíme s rýchlosťou $(0, -v_{y,\infty} < 0)$. Pre tento stav je invariant K

$$K = 2v_{y,\infty}. \quad (3.17)$$

Na základe toho vieme teda, že konečná rýchlosť bude

$$v_{y,\infty} = v_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.18)$$