

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Janči biliardista 2

Zadanie. Janči objavil podivný biliardový stôl s krivým okrajom. Gule sa po ňom kotúľajú rovno, ale pri odraze od kraja sa správajú nasledovne. Každá guľa si vie pre každý rovný úsek medzi odrazmi $A \rightarrow B$ vypočítať funkciu $H(A, B)$ a pri odraze v bodoch $A \rightarrow B \rightarrow C$ je poloha bodu B taká, aby $H(A, B) + H(B, C)$ malo nulovú deriváciu voči polohe bodu B . Popíšte geometricky správanie gule pri odraze ak

- $H(A, B)$ = dĺžka úsečky AB ,
- $H(A, B)$ = plocha medzi úsečkou AB a stolom. Keďže úsečka AB rozdeľuje stôl na dva úseky, myslíme plochu úseku napravo od tohoto úseku v smere jazdy gule.

Riešenie. (Autor riešenia: Janči)

opravuje Janči (jan.pulmann@gmail.com)

Hľadáme taký bod B , aby sa pri malom posune $B \rightarrow B'$ nemenila hodnota funkcie $H(A, B) + H(B, C)$ do prvého rádu: to znamená, že ak je vzdialenosť medzi B a B' okolo ε , tak zmena $H(A, B') + H(B', C) - (H(A, B) + H(B, C))$ musí byť úmerná až ε^2 . Preto budeme skúmať túto zmenu do prvého rádu v ε . Označme si vektory $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{CB}$ a aj posun bodu B ako $\mathbf{d} = \overrightarrow{BB'}$.

Prípád 1. Ak je funkcia H rovná dĺžke cesty, tak súčet $H(A, B) + H(B, C)$ vieme vyjadriť pomocou skalárneho súčinu ako

$$H(A, B) + H(B, C) = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} + \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}.$$

Pri posune bodu B o \mathbf{d} sa táto veličina zmení na

$$H(A, B') + H(B', C) = \sqrt{(\mathbf{v} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{d})} + \sqrt{(\mathbf{w} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{d})}.$$

Pozrime sa, ako sa mení napríklad vzdialenosť medzi A a B

$$H(A, B') = \sqrt{\mathbf{v}^2(1 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}/\mathbf{v}^2 + \mathbf{d}^2/\mathbf{v}^2)} \approx \sqrt{\mathbf{v}^2(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}/\mathbf{v}^2)} = H(A, B) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}/\sqrt{\mathbf{v}^2},$$

kde sme použili Bernoulliho aproximáciu $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ a tiež sme zanedbali člen s \mathbf{d}^2 . Súčet vzdialeností $H(A, B) + H(B, C)$ sa teda zmení pri posune $B \rightarrow B'$ v prvom ráde o

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}/\sqrt{\mathbf{v}^2} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{d}/\sqrt{\mathbf{w}^2} = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{v}/\sqrt{\mathbf{v}^2} + \mathbf{w}/\sqrt{\mathbf{w}^2}).$$

Výraz v zátvorke je súčet *normovaných* vektorov od A resp. C do B . Tento vektor delí uhol ABC na dve rovnaké polovice. Jeho skalárny súčin s \mathbf{d} bude nulový práve ak bude tento súčet kolmý na \mathbf{d} , alebo inak povedané ak bude uhol dopadu a uhol odrazu v bode B rovný.

Môžeme si všimnúť, že sme dostali rovnaké správanie ako je správanie lúčov svetla pri odraze: je to kvôli tomu, že aj lúče sa hýbu po trasách s extremalizovanou dĺžkou.

Prípád 2. Ak je funkcia H rovná obsahu pravej časti stola medzi trasou gule a okrajom, tak sa rovno pozrieme na zmenu súčtu týchto obsahov. Povedzme, že \mathbf{d} ukazuje doľava. Obsah $H(A, B)$ sa teda pri zmene z B na B' zväčší o obsah trojuholníka ABB' , ale obsah $H(B, C)$ sa zmenší o obsah trojuholníka CBB' . Pre extrémálne B , ktoré hľadáme, sa tieto obsahy musia rovnať.

Ak poznáme dve strany trojuholníka ako vektory, tak jeho obsah je polovica ich vektorového súčinu. Podmienka rovnosti obsahov trojuholníkov sa dá teda zapísať ak rovnosť vektorových súčinov

$$\mathbf{v} \times \mathbf{d} = \mathbf{w} \times \mathbf{d}$$

alebo teda

$$(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \times \mathbf{d} = 0.$$

Vektor $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ je jednoducho vektor \overrightarrow{AC} , a naša podmienka hovorí, že tento vektor musí byť rovnobežný s vektorom \mathbf{d} , ktorý je dotyčnicový k stolu. Bod B bude ležať v bode, kde je priamka rovnobežná s AC dotyčnicová ku stolu.

Ako si všimla Petra Čobrďová, tak extremalizovanie súčtu $H(A, B) + H(B, C)$ je ekvivalenté extremalizovaniu obsahu trojuholníka ABC . Keďže je jeho podstava AC fixná, tak stačí extremalizovať jeho výšku. To ale nastane práve keď je dotyčnica ku stolu v bode B rovnobežná s \overrightarrow{AC} , čo je naša nájdená podmienka.

Vidíme tiež, že bude obvod stola dostatočne zvlnený, tak bodov B môže existovať viacero. Pri matematickom štúdiu podobných biliardov sa preto často predpokladá, že stôl je konvexný.

Princíp extrémálneho účinku. Správanie takýchto umelých biliardových systémov je príkladom systému ktorý podlieha princípu extrémálneho účinku. Väčšina (klasických) fyzikálnych systémov sa správa podľa tohoto princípu. Jeden významný rozdiel ale je, že musíme skúmať všetky možné dráhy s fixným začiatkom a koncom, pričom pre náš biliard sme predpokladali, že medzi odrazmi sa guľa hýbe rovno. Takáto záľaha možných trás spôsobí, že extrémálna dráha bude daná diferenciálnou rovnicou namiesto našej jednoduchej podmienky na bod B .

Ako si všimol Richard Dudek, prípad 2. je *nelokálny*, teda na správanie sa pri odraze nestačí poznať len malé okolie bodu kde tento odraz nastáva, na rozdiel od prídadu 1. To je spôsobené tým, že účinok H je v prípade 2. nelokálny, keďže závisí od tvaru okraja stola ďaleko od biliardovej gule.

2.2 Kráľovstvo rovných zrkadiel

Zadanie. Ak dýchnete na zrkadlo a kolmo ho osvetlíte, tiež si na ňom môžete všimnúť dúhu. Zistite, aké lúče ju spôsobujú a nájdite jej uhlový polomer. Predpokladajte, že kvapky na zrkadle majú tvar polguli.

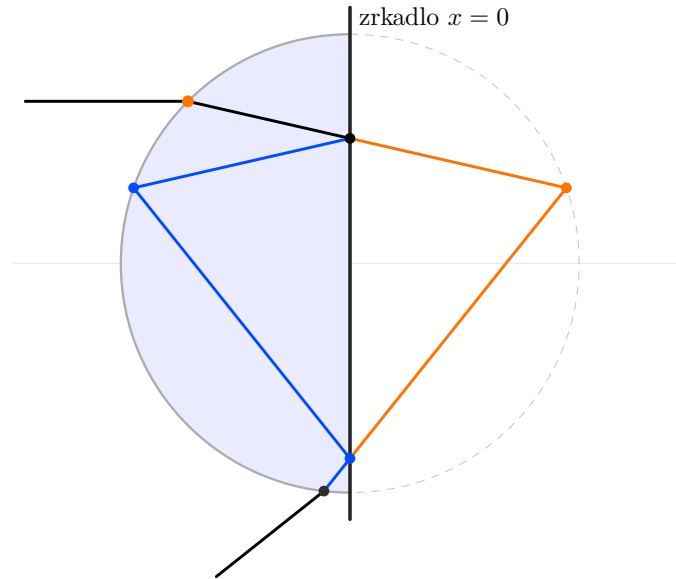
Riešenie. (Autor riešenia: **Dominik**)

opravuje **Dominik** (dominikrist@gmail.com)

Rovnice geometrickej optiky – Fermatov princíp najkratšieho¹ času, no tiež Maxwellove rovnice, z ktorých pramení – majú zrkadlovú symetriu: transformácia $x \mapsto -x$ ich zachováva. Ideálne rovinné zrkadlo realizuje práve

¹Presnejšie stacionárneho času.

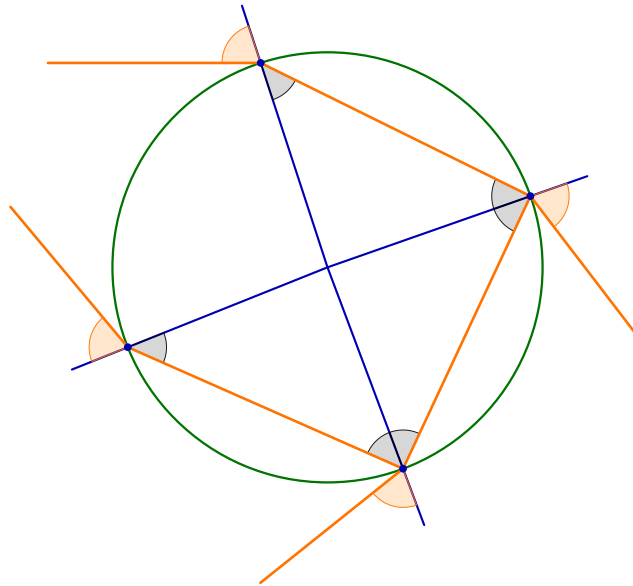
takúto transformáciu. Preto si ho môžeme odmyslieť, ak ploguľu preklopíme. Dostávame tak celú guľu – pozri obrázok 2.1. Analýza sa potom zvrháva na vysvetlenie klasickej dúhy na guľovej kvapke.



Obrázok 2.1: Cesta lúča v prípade primárnej dúhy (jeden vnútorný odraz od kvapky) od kvapiek na zrkadle. Lúč vstupuje do kvapky v oranžovom bode, láme sa. Oranžové čiary sú zrkadlovým obrazom modrých a znázorňujú šírenie v guľovej kvapke bez zrkadla.

Fyzikálne vysvetlenie klasickej dúhy je dobre známe, no aj tak si ho tu zhrňme. Dúha vzniká, keď veľa lúčov zasiahne veľké množstvo kvapiek. Zväzok lúčov vstúpi do kvapky, zlomí sa, niekoľkokrát sa v nej odrazí a pri výstupe sa opäť zlomí. Primárna dúha vzniká pri jednom vnútornom odraze, no poznáme aj dúhy vyššieho rádu (a progresívne slabšej intenzity), ktoré zodpovedajú k vnútorným odrazom. Aby odrazené lúče vytvorili viditeľný žiarivý pás, je potrebné, aby sa skoncentrovali. Ako si ukážeme, ak lúče vstúpia do kvapky blízko istého uhla, maximálne sa skoncentrujú – vytvoria kaustiku. Toto je uhol, pod akým vidíme jednotlivé vrstvy dúhy. V priblížení geometrickej optiky je funkciou iba počtu vnútorných odrazov k a indexu lomu (a teda frekvencie svetla) n . Poďme určiť túto funkciu.

Na obrázku 2.2 vidíme cestu lúča guľatou kvapkou.



Obrázok 2.2: Prechod lúča kvapkou.

Nech (oranžový) uhol, pod ktorým lúč vstupuje do kvapky, je i , potom podľa Snellovho zákona platí

$$\sin(i) = n \sin(r) \quad (2.1)$$

kde r je (čierny) uhol po lome. Následne lúč putuje kvapkou, až kým nepríde na okraj – tam sa časť zlomí a putuje von a časť sa odrazí späť do kvapky pod rovnakým uhlom (zákon odrazu). Vďaka tomu a rovnoramennosti všetkých trojuholníkov na obrázku sú si všetky čierne uhly rovné. Preto aj všetky oranžové uhly sú rovnaké. Nás zaujíma, o aký uhol sa lúč celkovo stočí oproti pôvodnému smeru.

Z obrázka je zrejmé, že príspevok za vstup a výstup z kvapky je $i - r$ a za každý vnútorný odraz $\pi - 2r$. Po k vnútorných odrazoch teda máme zmenu smeru o

$$\Delta_k(i) = 2(i - r) + k(\pi - 2r) = k\pi + 2i - 2(k + 1) \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) \quad (2.2)$$

kde r sme určili z (2.1). Maximálnu koncentráciu lúčov dostávame, keď je splnená kaustická podmienka

$$0 = \frac{d\Delta_k}{di} = 2 - 2(k + 1) \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}. \quad (2.3)$$

Táto rovnica má riešenie pre $k > 0$ a $1 \leq n \leq k + 1$:

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k^2 + 2k}}. \quad (2.4)$$

Pre červené svetlo a prechod vzduch-voda máme $n = 1.33$ a pre fialové $n = 1.344$. V prípade primárnej dúhy $k = 1$ dostávame $\Delta_1 \approx 137.5^\circ$ pre červené svetlo a $\Delta_1 \approx 139.5^\circ$ pre fialové svetlo. Fialové svetlo sa teda zlomí viac. Pozorovateľ preto uvidí fialový okraj dúhy ako vnútorný pod uhlom 40.5° od smeru dopadajúcich lúčov a červený okraj ako vonkajší pod uhlom 42.5° . Dúha má teda uhlovú šírku zhruba 2° .

Poznámka

Ako sme videli, zrkadlo si môžeme úplne odmyslieť pre lúče typu $k = 1$. Pre niektoré vyššie k (napr. $k = 4$) však uvidíme zrkadlový obraz klasickej k -dúhy, takže celkom si ho odmyslieť nemôžeme. Trik s rozvinutím cez zrkadlo síce funguje všeobecne, ale pri skladaní späť do pologule treba sledovať, koľkokrát lúč pretne rovinu zrkadla. To ovplyvní, na ktorej strane a v akej orientácii sa príslušný lúč objaví, nie však samotnú kaustickú podmienku.

2.3 Nenaolejuje-li tě Julie, naolejuje Julie oloid

Zadanie. *Jakub si zobral 2 kružnice s polomerom R a oblepil ich veľmi ľahkou páskou, aby vytvoril oloid. Aký pohyb vykonáva ťažisko, keď sa oloid valí po rovnomernom povrchu? Aká je perióda malých kmitov ťažiska v stabilnej polohe?*

Rátajte pre 2 prípady:

- celá hmotnosť sa nachádza rovnomerne na obručiach (kružniciach),
- celá hmotnosť sa nachádza rovnomerne na diskoch (kružhoch).

Predpokladajte, že oloid neprešmykuje.

Pre popis oloidu môžete použiť vzťahy z [tohto článku](#).

Riešenie. (Autor riešenia: **Jakub**)

opravuje **Jakub** (jakub.kocak@trojsten.sk)

Táto úloha testuje 2 schopnosti. Prvá je schopnosť vysomáriť sa v cudzom texte. Druhá je schopnosť riešiť úlohu malých kmitov, ak je daná kinematika pohybu.

Pohyb oloidu

Samotný pohyb oloidu je čisto geometrická otázka. Našťastie túto časť pre nás vyriešil **niekto iný**. Jediný rozdiel je, že polomer kružníc v článku je 1 a v zadaní je R . To len znamená, že všetky súradnice musíme iba preškálovať faktorom R . Postup pre určenie odvaľovania sa hocikákeho objektu po povrchu je vždy rovnaký, len geometria za tým môže byť komplikovanejšia. Aby sme sa v poskytnutom článku orientovali, vysvetlíme si rovnaký postup na analogickom objekte, ktorého odvaľovanie bude jednoduchšie. Valec aj kužeľ by boli príliš jednoduché objekty, tak si zvolíme zrezaný kužeľ.

Rovina dotyku

Najprv si musíme určiť, ako sa po povrchu predmetu pohybuje rovina dotyku. Rovina dotyku bude dotyčnicou ku povrchu predmetu. V prípade zrezaného kužeľa je to jednoduché, oba body A a B roviny dotyku budú na hornej a dolnej kružnici na koncoch zrezaného kužeľa. Na jednej kružnici bodom A prechádza dotyčnica ku kružnici, ktorá sa musí nachádzať v rovine dotyku. Rovnako na druhej kružnici bodom B prechádza dotyčnica ku kružnici, ktorá sa tiež musí nachádzať v rovine dotyku. Jedna dotyčnica a jeden bod nám už jednoznačne určujú rovinu dotyku. Ak zrežeme kužeľ rovinou prechádzajúcou rotačnou osou zrezaného kužeľa, tak práve prienik tejto roviny s plášťom bude úsečka dotyku a dotyčnicová plocha k prechádzajúca touto úsečkou je rovina dotyku. Pohyb týchto bodov môžeme parametrizovať napríklad uhlom otočenia φ okolo osi otáčania.

Podobne v prípade oloidu, body dotyku A a B budú každí na jednej z kružníc. Podobne, dotyčnice v bodoch A a B sa musia nachádzať v rovine dotyku. Z geometrie obrázka 2 nájdeme prienik týchto priamok (bod T) a tým

máme jednoznačne určenú rovinu dotyku (rovina TAB) a úsečku dotyku AB. Už len si zavedieme systém súradníc (cez uhol t), ktorý nám bude parametrizovať pohyb bodov A, T a B (rovnice 2, 3 a 4). V článku máme ešte 2 informácie. Zhodou okolností úsečka dotyku má vždy dĺžku $\sqrt{3}R$ (teorém 1) a existuje pekný vzťah medzi uhlom t a uhlom u na jednotlivých úsečkách (rovnica 6).

Odvalovanie

Keď už máme popísanú rovinu dotyku, musíme tento popis preniesť do pohybu v rovine. V prípade zrezaného kužela urobíme malú zmenu v uhle otočenia $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ a dostaneme malý štvoruholník tvorený starými bodmi A, B a novými bodmi A, B. Ten sa preniesie do roviny. Keďže sa vždy prenáša rovnaký tvar, tak dostaneme, že zrezaný valec na rovine vynáša medzikružie. Odvalená dĺžka vonkajšej kružnice zodpovedá veľkej kružnici kužela a podobne to platí pre vnútornú kružnicu. Polomer kružníc zodpovedá vzdialenosti okraja kružníc do vrcholu kužela.

V prípade oloidu, je toto najkomplikovanejšia časť, keďže odvalený štvoruholník vždy mení tvar. Článok použije všeobecný postup, ktorý sa používa v oblasti zvanej diferenciálna geometria. Určí sa bod zakrivenia K, zakrivenie κ v každom momente a z toho sa odvodí rovnica pohybu dotykového bodu A v rovine (rovnica 11). Podobne dostaneme rovnicu pohybu dotykového bodu B v rovine (rovnica 18). Ide o matematické metódy vysoko nad rámec strednej školy, my si môžeme výsledok vykresliť, či sedí s naším očakávaním odvalenia oloidu.

Pohyb bodov

Keď už poznáme, ako sa teleso odvaluje, tak pre úplný popis potrebujeme preniesť popis bodov v súradniciach telesa na popis bodov v súradniciach stola. V prípade zrezaného kužela by prirodzený popis bodov kužela bol pomocou súradníc x, y a z , kde z -ová os bude zodpovedať osi kužela. Následne si popíšeme pohyb tejto osy pri odvalovaní a uhol otočenia kužela. Keby sme to všetko dali dokopy, tak dostaneme maticovú rovnicu tvaru

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0(\varphi) \\ Y_0(\varphi) \\ Z_0(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}(\varphi) & a_{12}(\varphi) & a_{13}(\varphi) \\ a_{21}(\varphi) & a_{22}(\varphi) & a_{23}(\varphi) \\ a_{31}(\varphi) & a_{32}(\varphi) & a_{33}(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

kde prvý člen zodpovedá pohybu počiatku súradnicového systému x, y, z a druhý člen tvorí matica natočenia $a_{ij}(\varphi)$, ktorá správne otáča pôvodný systém súradníc na systém súradníc stola.

Obdobne v prípade oloidu, dostaneme rovnaký popis v teoréme 4. Môžeme z toho teda vyčítať pohyb ťažiska ako

$$\begin{pmatrix} X_0(t) \\ Y_0(t) \\ Z_0(t) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{9} R \begin{pmatrix} \frac{cs\sqrt{1+2c}}{2(1+c)\sqrt{2(1+c)}} + 2 \arccos \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{1+c}} \\ \frac{15+13c-c^2}{2(1+c)} + \ln \frac{2}{1+c} \\ \frac{3\sqrt{3}(2+c)}{2\sqrt{2(1+c)}} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

kde $c = \cos t$ a $s = \sin t$. Ak si tento pohyb vykreslíme, tak v smeroch X a Y vykonáva ťažisko pohyb po esovitej dráhe pozdĺž osy X a v Z smere chodí hore-dole po esovitej dráhe. Stabilná poloha je určená minimom funkcie $Z_0(t)$ ako

$$\frac{d}{dc} Z_0(c) = R \frac{\sqrt{2}c}{8(1+c)^{\frac{3}{2}}} = 0 \implies c = 0 \implies t = \pm \frac{\pi}{2} \implies u = \pm \frac{\pi}{2},$$

kde sme dostali, že minimum sa nachádza práve keď sa rovina dotýka kružníc v bodoch pod pravým uhlom t a u .

Malé kmity

Keď máme systém, ktorý má viac ako jeden hmotný bod, tak sa hľadanie stabilnej polohy a periódy malých kmitov cez sily hľadá komplikovane. Často musíme riešiť normálové sily, projekcie do smerov a je veľmi ľahké urobiť pri tom chybu. Omnoho jednoduchšie sa taký problém rieši cez energie. Je však potrebné poznať kinematiku systému na základe jedného parametru p .

Základná myšlienka tejto metódy je analógia. Pri harmonickom oscilátore s potenciálnou energiou

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.3)$$

a kinetickou energiou

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (3.4)$$

vieme, že perióda malých kmitov T je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.5)$$

Ak teda máme kinematický popis nášho systému cez jeden parameter p , nájdeme stabilnú polohu a pre malé výchylky parametra δp vieme popísať potenciálnu energiu ako

$$E_p = \frac{1}{2}k\delta p^2, \quad (3.6)$$

kde K je nejaká konštanta, a kinetickú energiu vieme napísať ako

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{\delta p}^2, \quad (3.7)$$

kde M je nejaká konštanta, tak poznáme periódu malých kmitov T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.8)$$

Poznáme príklady takýchto úloh z FX (napr. Kmitajúca obruč v 9. ročníku FX) a aj z IPhO (napr. problém číslo 2 z roku 1984).

V našom prípade poznáme kinematický popis problému cez parameter t (teorém 4). Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme zvoliť stabilnú polohu $t_0 = \frac{\pi}{2}$ a malé výchylky δt . Než prejdeme ku riešeniu, z fyzikálneho hľadiska vieme, že výsledok nezávisí od hmotnosti olovidu (dvakrát väčšia hmotnosť sa prejaví dvakrát väčšou potenciálnou energiou a dvakrát väčšou kinetickou energiou) a teda z rozmerovej analýzy (a z analógie s ostatnými kyvadlami) vieme, že výsledok bude mať tvar

$$T = 2\pi Q\sqrt{\frac{R}{g}}, \quad (3.9)$$

kde Q je nejaké kladné číslo. Teraz iba potrebujeme nájsť toto číslo Q .

Potenciálna energia

Jednoduchšia časť je potenciálna energia. Jediná zložka potenciálnej energie je určená polohou ťažiska, čo je

$$E_p = MgZ_0(t), \quad (3.10)$$

kde M je celková hmotnosť olouidu. Bude nás teda iba zaujímať rozvoj funkcie $Z_0(t)$ okolo $t_0 = \frac{\pi}{2}$ s výchylkou δt maximálne do druhého rádu. Pre kosínus dostaneme

$$c(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta t\right) \approx -\delta t. \quad (3.11)$$

A pre funkciu Z_0 dostaneme

$$Z_0(c) = R \frac{2+c}{2\sqrt{2}(1+c)} \approx \frac{R}{\sqrt{2}} + \frac{R}{8\sqrt{2}} \delta c^2, \quad (3.12)$$

takže pre celkovú potenciálnu energiu dostaneme

$$E_p = Mg \frac{R}{\sqrt{2}} + MgR \frac{1}{8\sqrt{2}} \delta t^2. \quad (3.13)$$

Teda fiktívna tuhosť k týchto kmitov je

$$k = MgR \frac{1}{4\sqrt{2}}. \quad (3.14)$$

Kinetická energia

Obsiahnuť všetku kinetickú energiu bude náročnejšie, keďže máme veľa pohyblivých častí. Pri kinetickej energii si vystačíme s popisom rýchlosti jednotlivých častí v parametri δt iba do prvého rádu, keďže kinetická energia závisí od druhej mocniny rýchlostí častíc.

Celková kinetická energia má 2 zložky. Jedna zložka zodpovedá translačnému pohybu telesa pozdĺž trajektórie ťažiska (prvý člen) a druhá zložka zodpovedá rotácii olouidu okolo osi dotyku (druhý člen).

Najprv si napíšeme popis pre $t = \frac{\pi}{2} + \delta t$. Môžeme použiť

$$c = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta t\right) \approx -\delta t$$

$$s = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta t\right) \approx 1.$$

Po dosadení dostaneme, že ťažisko sa v okolí stabilnej polohy hýbe ako

$$\begin{pmatrix} X_0(t) \\ Y_0(t) \\ Z_0(t) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{9} R \begin{pmatrix} \pi + \frac{7\sqrt{2}}{4} \delta t \\ \frac{15}{2} + \ln 2 + 2\delta t \\ \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Dostávame správne, že v smere osy Z sa oloid nehýbe, keďže je v minime. Translačná zložka kinetickej energie je teda

$$E_{k,t} = \frac{1}{2}M(\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2) = \frac{1}{2}MR^2 \frac{1}{27} \left(\frac{49}{8} + 4 \right) \dot{\delta}^2 = \frac{1}{2}MR^2 \frac{1}{27} \left(\frac{49}{8} + 4 \right) \dot{\delta}^2 = \frac{1}{2}MR^2 \frac{3}{8} \dot{\delta}^2 \quad (3.16)$$

Pre maticu natočenia $a_{ij}(t)$ dostaneme

$$(a_{ij}(t)) = \frac{\sqrt{3}}{9} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \left(1 - \frac{7}{10} \delta t\right) & \sqrt{2} & \frac{5}{2} \left(1 + \frac{7}{10} \delta t\right) \\ -(1 + 2\delta t) & 5 & -(1 - 2\delta t) \\ -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \delta t\right) & -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \delta t & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \delta t\right) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Keďže nás bude zaujímať časová derivácia, tak si vystačíme iba s časťou, ktorá závisí od δt

$$(b_{ij}) = \delta t \begin{pmatrix} -\frac{35\sqrt{3}}{180} & 0 & \frac{35\sqrt{3}}{180} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{9} & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Aby sme získali kinetickú energiu rotácie, tak budeme musieť zrátať kinetickú energiu každého bodu, teda

$$E_{k,r} = \int_m dm \frac{1}{2} (\Delta \dot{X}^2 + \Delta \dot{Y}^2 + \Delta \dot{Z}^2) \quad (3.19)$$

Obruče

Ak uvažujeme obruče, tak majú dĺžkovú hustotu λ

$$\lambda = \frac{M}{4\pi R}. \quad (3.20)$$

Prvú kružnicu K_A vieme popísať ako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin \varphi \\ R \cos \varphi - \frac{R}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

a druhú kružnicu K_B ako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos \varphi + \frac{R}{2} \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Hmotnosť jedného úseku $d\varphi$ je $dm = \lambda R d\varphi$. Kinetická energia potom je

$$\begin{aligned}
 E_{k,r} &= \int_{K_A+K_B} d\varphi \lambda R \frac{1}{2} (\Delta \dot{X}^2 + \Delta \dot{Y}^2 + \Delta \dot{Z}^2) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \lambda R \frac{1}{2} \dot{\delta t}^2 \left\{ \frac{113}{432} R^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{8} \left[R \sin \varphi + 2R \left(\cos \varphi - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right\} \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} d\varphi \lambda R \frac{1}{2} \dot{\delta t}^2 \left\{ \frac{113}{432} R^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{8} \left[R \sin \varphi + 2R \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right\}
 \end{aligned}$$

Po vyrátaní integrálov dostaneme

$$E_{k,r} = \frac{1}{2} MR^2 \frac{491}{864} \dot{\delta t}^2 \quad (3.23)$$

a fiktívna hmotnosť m kmitov je

$$m = MR^2 \frac{491}{864}. \quad (3.24)$$

Periódka kmitov teda nakoniec je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \underbrace{\sqrt{\frac{491\sqrt{2}}{216}}}_{\approx 1.793}, \quad (3.25)$$

a číslo Q je približne 1.793.

Disky

Ak uvažujeme disky, tak majú plošnú hustotu σ

$$\sigma = \frac{M}{2\pi R^2}. \quad (3.26)$$

Prvý disk D_A vieme popísať ako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi - \frac{R}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

a druhý disk D_B ako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \cos \varphi + \frac{R}{2} \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Hmotnosť jednej plochy $\rho d\rho d\varphi$ je $dm = \sigma \rho d\rho d\varphi$. Kinetická energia potom je

$$\begin{aligned} E_{k,r} &= \int_{D_A+D_B} d\rho d\varphi \sigma \rho \frac{1}{2} (\Delta \dot{X}^2 + \Delta \dot{Y}^2 + \Delta \dot{Z}^2) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} d\rho d\varphi \sigma \rho \frac{1}{2} \dot{\delta t}^2 \left\{ \frac{113}{432} \rho^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{8} \left[\rho \sin \varphi + 2 \left(\rho \cos \varphi - \frac{R}{2} \right) \right]^2 \right\} \\ &\quad + \int_0^R \int_0^{2\pi} d\rho d\varphi \sigma \rho \frac{1}{2} \dot{\delta t}^2 \left\{ \frac{113}{432} \rho^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{8} \left[\rho \sin \varphi + 2 \left(\rho \cos \varphi + \frac{R}{2} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Po vyrátaní integrálov dostaneme

$$E_{k,r} = \frac{1}{2} MR^2 \frac{599}{1728} \dot{\delta t}^2 \quad (3.29)$$

fiktívna hmotnosť m kmitov je

$$m = MR^2 \frac{599}{1728}. \quad (3.30)$$

Periódá kmitov teda nakoniec je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \underbrace{\sqrt{\frac{599\sqrt{2}}{432}}}_{1.400}, \quad (3.31)$$

a číslo Q je približne 1.400. Je to v súlade s fyzikálnou intuíciou, keďže sa hmotnosť presunula bližšie ku otáčaniu.

Mimo úlohy už iba spomenieme, že oloid je zaujímavý vďaka tomu, že pri valení po stole sa každý bod na jeho povrchu dotkne stola. Takisto sa používa v špeciálnych mixéroch, ktoré vyžadujú úplne premiešanie tekutiny (teda, aby sme sa vyhli "mrtvým" zónam) a zároveň vďaka hladkému povrchu je výsledné miešanie hladké a vhodné pre miešanie tekutín, ktoré sú citlivé na šmykové pnutie (napríklad nenewtonovské tekutiny).