

Zadania 2. kola zimnej časti

Termín odoslania 13. 01. 2025

2.1 Michelinská hviezda

9 bodov

Janči omylom zavrel dokonale izolované dvere do svojej dokonale izolovanej kuchyne. Vo vnútri beží chladnička, ktorá drží svoje vnútro na konštantnej teplote. Čo sa stane s kuchyňou? Predpokladajte, že chladnička funguje ako ideálne tepelné čerpadlo.

2.2 Lenivá tyčka

9 bodov

Jakub ledabolo oprel tyčku o stenu. Tá však neostala na mieste a zošuchla sa po stene na podlahu.

1. Napíšte pohybové rovnice pre pohyb ťažiska tyčky.
2. Za akých podmienok dostaneme rovnicu pohybu kyvadla?
3. Pre netriviálne parametre numericky vypočítajte čas pádu tyčky.

Uvažujte homogénnu tyčku dĺžky L a hmotnosti m , ktorá na začiatku zvierá s podlahou uhol α . Koeficient trenia medzi tyčkou a zemou je f_1 a medzi tyčkou a stenou je f_2 .

2.3 Kolabujúci elektrón

9 bodov

Rýchlokurz kvantovou fyzikou

V kvantovej fyzike je stav elektrónu úplne popísaný vlnovou funkciou $\Psi(\mathbf{r})$, čo je komplexná funkcia závislá na polohe elektrónu v priestore $\mathbf{r}$. Druhá mocnina absolútnej hodnoty $|\Psi(\mathbf{r})|^2 = \rho(\mathbf{r})$ má fyzikálny význam hustoty pravdepodobnosti výskytu elektrónu v polohe $\mathbf{r}$. Preto, ak preintegrujeme hustotu pravdepodobnosti cez celý priestor, tak dostaneme celkovú pravdepodobnosť výskytu elektrónu niekde vo svete, čo je práve 1.

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 1 \quad (2.3.1)$$

Ak máme elektrón v nejakom systéme, tak sa môže nachádzať v ľubovoľnom stave $\Psi(\mathbf{r})$ (jediná podmienka je rovnica 2.3.1). Avšak iba niektoré stavy sú statické (stabilné) – volajú sa vlastné stavy $\varphi_i(\mathbf{r})$. Vlastné stavy majú zopár vlastností:

- Vlastné stavy sú označené číslom i (tzv. kvantové číslo) alebo skupinou kvantových čísel.
- Vlastné stavy sú na seba kolmé vo význame integrálu cez celý priestor (všimnite si, že v prípade $i = j$ dostaneme rovnicu 2.3.1).

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi_i^*(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j \\ 0 & \text{pre } i \neq j \end{cases} \quad (2.3.2)$$

- Lubovoľný stav $\Psi(\mathbf{r})$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia všetkých vlastných stavov

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\forall i} c_i \varphi_i(\mathbf{r}). \quad (2.3.3)$$

- Ak sa elektrón nachádza v stave $\Psi(\mathbf{r})$, ktorý nie je vlastný a elektrón pozorujeme, tak nastane takzvaný kolaps vlnovej funkcie – elektrón zmení svoj stav na jeden z vlastných stavov $\varphi_i(\mathbf{r})$ s pravdepodobnosťou $|c_i|^2$.

Zadanie

Atóm trícia ${}^3_1\text{H}$ je v základnom stave (vlastný stav s najnižšou energiou) atómu vodíka ($n = 1, l = 0, m = 0$). Znudené jadro podstúpi β -rozpad a zmení sa na jadro hélia ${}^3_2\text{He}$. Prekvapený elektrón už viac nie je vo vlastnom stave nového jadra a preto keď ho pozorujeme, tak si elektrón musí vybrať, do ktorého z vlastných stavov nového jadra skolabuje.

1. Aká je pravdepodobnosť, že elektrón skolabuje do základného stavu nového jadra $\varphi_{100}(\mathbf{r})$?
2. Aká je pravdepodobnosť, že elektrón skolabuje do iného väzobného vlastného stavu nového jadra $\varphi_{nlm}(\mathbf{r})$?
3. Aká je pravdepodobnosť, že elektrón ionizuje (skolabuje do nejakého z vlastných stavov opúšťajúc jadro)?

Nápoveda: V jadre s nábojom Z sú vlastné (väzobné) stavy popísané v sférických súradniciach ako

$$\varphi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2Z}{n}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} e^{-\frac{Zr}{n}} \left(\frac{2Zr}{n}\right)^l L_{n-l-1}^{(2l+1)}\left(\frac{2Zr}{n}\right),$$

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi},$$

kde $L_{n-l-1}^{(2l+1)}$ je zovšeobecnený Laguerrov polynóm

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}),$$

a P_l^m je pridružený Legendrov polynóm

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{(l+m)}}{dx^{(l+m)}} (x^2-1)^l.$$

Možné hodnoty kvantových čísel sú $n \in \{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$, $l \in \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$,
 $m \in \{-l, -l+1, -l+2, \dots, l-1, l\}$.