

## Riešenia 1. kola zimnej časti

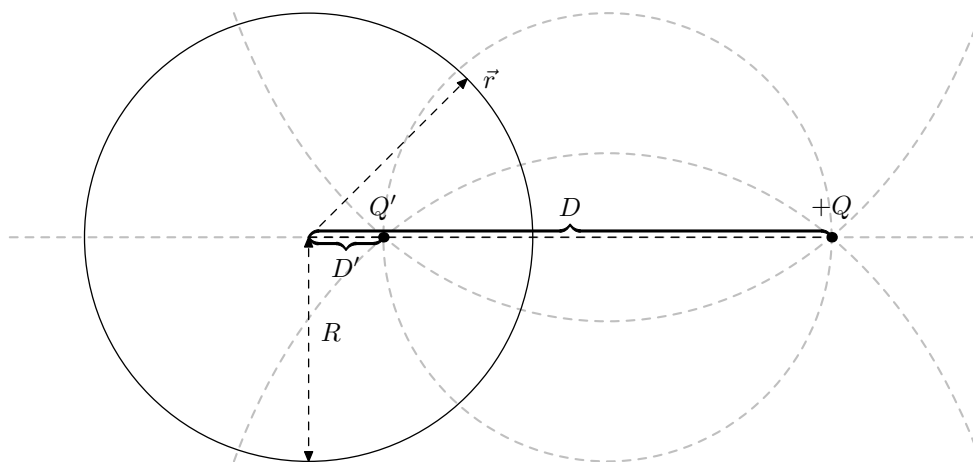
### 1.1 Nabitá guľa

**Zadanie.** Vodivú guľu s polomerom  $R$  umiestnime do homogénneho elektrického poľa intenzity  $E$ . Na povrchu guľe sa distribuuje náboj. Guľu rozrežeme na dve polovice rovinou kolmou na elektrické pole. Aký náboj je na poglobuliach?

**Riešenie.** (Autor riešenia: Janči a Jakub ([jakocak@gmail.com](mailto:jakocak@gmail.com))) opravuje Janči ([jan.pulmann@gmail.com](mailto:jan.pulmann@gmail.com))

#### Riešenie cez zrkadlenie

Predpokladajme, že homogénne elektrické pole v okolí guľe je spôsobené dvojicou opačných nábojov  $+Q$  a  $-Q$  vzdialených ďaleko od seba v polohách  $(+D, 0, 0)$  a  $(-D, 0, 0)$ . V toto nastavení sa dá nájsť elektrické pole v okolí guľe pomocou metódy zrkadlenia nábojov. Platí totiž, že ak máme jeden náboj v okolí vodivej guľe, tak elektrické pole takejto sústavy je identické s elektrickým poľom dvojice pôvodný náboj a imaginárny náboj. Konkrétne, ak máme náboj  $+Q$  v polohe  $D$ , tak druhý (imaginárny) náboj má veľkosť  $Q' = -Q \frac{R}{D}$  a polohu  $D' = \frac{R^2}{D}$ . V prípade sústavy dvoch nábojov v okolí vodivej guľe je elektrické pole superpozíciou jednotlivých riešení pre jeden náboj.



Obrázok 1.1: Zrkadlenie náboja  $+Q$  na vodivej guľi s polomerom  $R$  na imaginárny náboj  $Q'$ .

Vyriešime najprv teda úlohu pre jeden náboj. Majme náboj  $+Q$  v polohe  $(+D, 0, 0)$ . Druhý imaginárny náboj bude teda mať veľkosť  $-Q \frac{R}{D}$  a bude sa nachádzať v polohe  $(\frac{R^2}{D}, 0, 0)$ . Elektrický potenciál tejto dvojice nábojov v bode  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  je potom

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2Dx}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \frac{R}{D}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{D^2} - 2\frac{R^2}{D}x}}. \quad (1.1)$$

Po malej úprave dostaneme

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2Dx}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{\frac{D^2}{R^2}r^2 + R^2 - 2Dx}}. \quad (1.2)$$

Môžeme si všimnúť, že na povrchu gule  $|\mathbf{r}| = R$  je potenciál nulový. Keďže nás bude zaujímať, aké je elektrické pole na povrchu gule  $|\mathbf{r}| = R$ , potrebujeme záporný gradient potenciálu

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (1.3)$$

A keďže nás bude zaujímať radiálny smer, prevedieme výraz do sférických súradníc

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2Dr \cos \theta}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{\frac{D^2}{R^2}r^2 + R^2 - 2Dr \cos \theta}}. \quad (1.4)$$

Pre elektrickú intenzitu na povrchu gule tak potom dostaneme

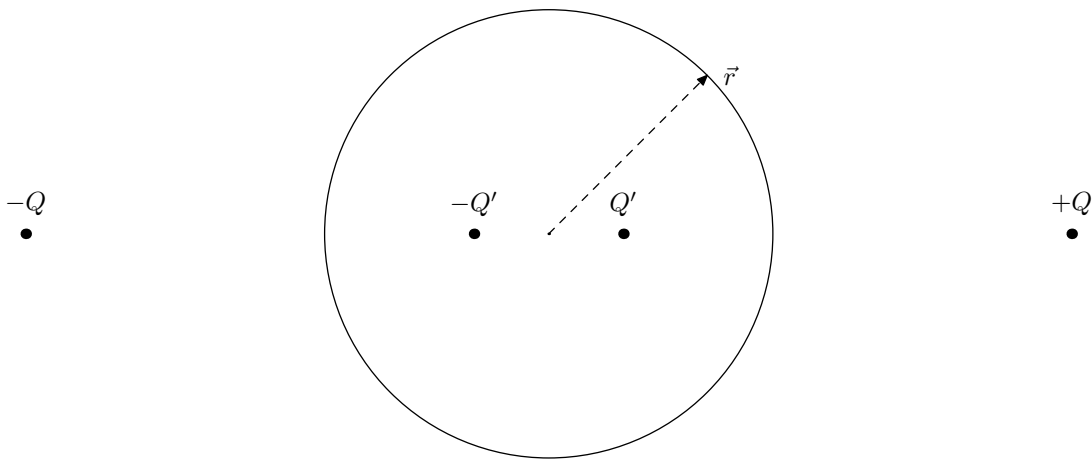
$$E_r = - \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{(D^2 - R^2)}{(R^2 + D^2 - 2DR \cos \theta)^{3/2}}. \quad (1.5)$$

Keďže toto je elektrické pole nad guľou a elektrické pole pod povrchom gule je nula, tak z Gaussoveho zákona vieme vypočítať plošnú hustotu náboja na povrchu gule ako

$$\sigma^+ = \epsilon_0 E_r. \quad (1.6)$$

Keďže je náboj  $+Q$  vo veľkej vzdialenosti  $D \gg R$ , môžeme použiť aproximáciu pre popis distribúcie náboja na povrchu gule

$$\sigma^+ = - \frac{Q}{4\pi R D^3} \frac{(D^2 - R^2)}{\left(1 - 2\frac{R}{D} \cos \theta + \frac{R^2}{D^2}\right)^{3/2}} \approx - \frac{Q}{4\pi R D} \left(1 + 3\frac{R}{D} \cos \theta\right). \quad (1.7)$$



Obrázok 1.2: Zrkadlenie nábojov  $+Q$  a  $-Q$  na vodivej guľe s polomerom  $R$  na imaginárne náboje  $Q'$  a  $-Q'$ .

Keď budeme postupovať rovnako pre náboj  $-Q$  v polohe  $(-D, 0, 0)$ , tak dostaneme, že ním indukovaná hustota náboja na povrchu gule je

$$\sigma^- = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{RD} \left( 1 - 3 \frac{R}{D} \cos \theta \right). \quad (1.8)$$

Celkový povrchový náboj na guli potom je

$$\sigma = \sigma^+ + \sigma^- = -\frac{3Q}{2\pi} \frac{1}{D^2} \cos \theta. \quad (1.9)$$

Ak teda vypočítame náboj na jednej pologuli, tak dostaneme

$$Q_{\text{semi}} = \int \sigma dS = \int_0^{\pi/2} \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{3Q}{2} \frac{R^2}{D^2}. \quad (1.10)$$

Nás však zaujíma, ako tento náboj závisí od veľkosti vonkajšieho homogénneho elektrického poľa  $E$ . Náboje  $+Q$  a  $-Q$  vytvárajú v okolí gule približne homogénne elektrické pole veľkosti

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{D^2} - \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{D^2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{D^2}. \quad (1.11)$$

Keď vyberieme tento faktor von z výrazu pre náboj na pologuli, tak dostaneme

$$Q_{\text{semi}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{D^2} \cdot 3\pi\epsilon_0 R^2 = 3\pi\epsilon_0 E R^2. \quad (1.12)$$

### Dipólové riešenie

V homogénnom elektrickom poli  $(-E, 0, 0)$  sa sféra nabije tak, že na ľavej ( $x < 0$ ) polovici sa zhromažďí kladný náboj, a na pravej polovici zase záporný. To inšpirovalo viacerých riešiteľov, aby skúsili, či sa dá nahraďiť pole sféry polom dipólu umiestneného do stredu sféry. Uvažujme teda dipól s momentom  $(-m, 0, 0)$  v počiatku<sup>1</sup>. Potenciál tohoto dipólu má tvar

$$U_{\text{dipól}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{mx}{r^3}, \quad (1.13)$$

čo spolu s potenciálom  $Ex$  homogénneho poľa dáva

$$U_{\text{spolu}}(r) = \left( E - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{r^3} \right) x. \quad (1.14)$$

Tu prichádza kľúčové pozorovanie: ak nastavíme  $m$  správne, celkový potenciál  $U_{\text{spolu}}$  bude na povrchu sféry  $r = R$  konštantný. Konkrétne, treba aby

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{R^3}, \quad \text{teda} \quad m = 4\pi\epsilon_0 E R^3. \quad (1.15)$$

Našli sme takto potenciál, ktorý spĺňa okrajové podmienky (na sfére je konštantný a v nekonečne popisuje homogénne elektrické pole) a tiež elektrostatické Maxwellove rovnice. Vďaka tomu, že riešenia elektrostatických rovníc

<sup>1</sup>Pripomínam, že takýto dipól s momentom  $m$  sa má chápať ako limita  $\delta \rightarrow 0$  dvoch nábojov veľkosti  $\pm m/\delta$  umiestnených na  $(\mp\delta/2, 0, 0)$ .

sú jedinečné, si teda môžeme byť istí, že  $U_{\text{spolu}}$  popisuje aj potenciál vodivej sféry pre  $r \geq R$ . Keďže vo vnútri sféry je pole nulové, potenciál tam je konštantný (v našom prípade 0).

Náboj na polguliach sa dá teraz jednoducho spočítať tak ako vyššie, s pomocou Gaussovho zákona a integrovania takto určenej plošnej hustoty náboja. Všimnime si tiež, že v predchádzajúcom riešení sa v limite  $D \rightarrow \infty$  zrkadlené náboje vo vnútri gule približujú a zväčšujú, teda vytvárajú dipól. Lahko sa môžete presvedčiť, že jeho moment  $Q' \cdot 2D'$  súhlasí s výsledkom v (1.15).

### Ako spočítať náboj na polguli bez integrovania

Vyššie spočítaný plošný integrál nie je zložitý, ale môžeme sa mu vyhnúť. Vieme, že náboj na polguli je úmerný (skrz  $\epsilon_0$ ) toku elektrického poľa cez túto polgulu. Vo vnútri gule je pole nulové, vonku je dané záporným gradientom  $U_{\text{spolu}}$ . Tok cez polgulu má teda dva príspevky

$$Q_{\text{semi}}/\epsilon_0 = \Phi_{\text{semi}}^{\text{homog}} + \Phi_{\text{semi}}^{\text{dipól}}, \quad (1.16)$$

kde myslíme len tok cez otvorenú polguľu (nezarátavame tok cez kruh ohraničený rovníkom). Prvý člen spočítame ľahko: tok homogénneho elektrického poľa cez polguľu je rovný toku cez rovníkový kruh, teda

$$\Phi_{\text{semi}}^{\text{homog}} = \pi R^2 E. \quad (1.17)$$

Tok od poľa dipólu spočítame ako tok od dvoch pomyselných nábojov tvoriacich dipól, teda s veľkosťami  $\pm m/\delta$  a rozstupom  $\delta$ :

$$\Phi_{\text{semi}}^{\text{dipól}} = \Phi \left( \begin{array}{c} \text{polgula} \\ m/\delta \\ \delta/2 \end{array} \right) + \Phi \left( \begin{array}{c} \text{polgula} \\ -m/\delta \\ \delta/2 \end{array} \right) = \Phi \left( \begin{array}{c} \text{polgula} \\ m/\delta \\ \delta/2 \end{array} \right) - \Phi \left( \begin{array}{c} \text{polgula} \\ m/\delta \\ \delta/2 \end{array} \right). \quad (1.18)$$

kde sme v druhom člene zmenili znamienko náboja a kompenzovali to zmenou znamienka toku. Z Gaussovho zákona vieme, že polosféry môžeme deformovať, ak počas deformácie neprechádzame plochou cez náboj (rozdiel tokov je úmerný náboju medzi pôvodnou a deformovanou plochou, teda nule). Prvú polosféru deformujeme na valec bez jednej podstavy, druhú na kruh:

$$\Phi_{\text{semi}}^{\text{dipól}} = \Phi \left( \begin{array}{c} \text{valec} \\ m/\delta \\ \delta/2 \end{array} \right) - \Phi \left( \begin{array}{c} \text{kruh} \\ m/\delta \\ \delta/2 \end{array} \right) \quad (1.19)$$

Tok cez kruhy sa vykrátí<sup>2</sup>, a dostaneme len tok cez plášť tenkého cylindra s polomerom  $R$  a výškou  $\delta$

$$\Phi_{\text{semi}}^{\text{dipól}} = \Phi \left( \left. \begin{array}{c} \delta \\ \left. \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} R \\ m/\delta \cdot \end{array} \right) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{m/\delta}{R^2}}_{\text{elektrická intenzita na valci}} \underbrace{2\pi R \delta}_{\text{povrch valca}} = 2\pi E R^2 \quad (1.20)$$

Spolu s tokom homogénneho poľa (1.17) dostanme, že náboj na hornej polsfére je

$$Q_{\text{semi}} = (2\pi E R^2 + \pi E R^2) \epsilon_0 = 3\pi \epsilon_0 E R^2 \quad (1.21)$$

## 1.2 Relativistická plachetnica

**Zadanie.** NASA sa rozhodla poslať low-cost misiu k Proxima Centauri. Sonda má na sebe zrkadlo natočené smerom na Zem, na ktoré svietime zo Zeme lasermi. Laserový lúč sa od zrkadla odráža a urýchľuje sondu svetelným tlakom. Za aký čas príde sonda do cieľa (čas je meraný v pokojovej sústave Zem – Proxima Centauri)? A akú bude mať rýchlosť na konci cesty? Lasery majú vlnovú dĺžku  $\lambda = 650 \text{ nm}$  a celkový výkon  $P = 10 \text{ MW}$ , sonda má hmotnosť  $m = 0,1 \text{ kg}$  a Proxima Centauri je vzdialená  $d = 4,2 \text{ ly}$ . Predpokladajte, že NASA sa veľmi nezaoberala technickými detailami (ako zaostrenie laserov na veľké vzdialenosti) a všetko svetlo z laserov sa odráža od sondy späť.

*Nápoveda:* Najprv vypočítajte zrážku jedného fotónu so sondou.

**Riešenie.** (Autor riešenia: **Jakub**)

opravuje **Jakub** ([jakocak@gmail.com](mailto:jakocak@gmail.com))

Najprv si zadefinujeme pokojovú sústavu Zeme a Proxima Centauri tak, že Zem sa nachádza v počiatku  $\mathbf{r}_{\text{Zem}} = (0, 0, 0)$  a Proxima Centauri v  $x$ -ovom smere  $\mathbf{r}_{\text{Proxima Centauri}} = (d, 0, 0)$ . Laserový lúč (fotóny) a sonda sú vysielané zo Zeme v pozitívnom smere osi  $x$ . Najprv musíme vypočítať, ako je sonda urýchlená pri zrážke s jedným fotónom. Musíme uvažovať relativistickú zrážku.<sup>3</sup> Pri klasickej zrážke sa zachováva vektor celkovej hybnosti a celková energia, pri relativistickej zrážke sa zachováva 4-vektor celkovej hybnosti (prvá súradnica je úmerná energii a zvyšné tri súradnice zodpovedajú hybnosti). 4-vektor hybnosti  $P_{\text{objekt}}$  objektu s hmotnosťou  $m$  a rýchlosťou  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  je

$$P_{\text{objekt}} = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left( \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (2.1)$$

kde sme použili  $E = \gamma mc^2$  celkovú energiu objektu a  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$  relativistickú hybnosť objektu. Pripomínáme, že  $c$  je rýchlosť svetla a  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  je Lorentzov faktor.

<sup>2</sup>Všimnite si, že oba členy v rovnici (1.19) divergujú pre  $\delta \rightarrow 0$ , keďže veľkosť nábojov tvoriacich dipól je úmerná  $1/\delta$ . My počítame konečný príspevok ku ich rozdielu.

<sup>3</sup>Dôvody sú dva: 1. Ak si spočítame úlohu v klasickej mechanike, dosiahneme nakoniec relativistické rýchlosti  $v > 0,1c$ . 2. Lebo názov úlohy.

4-vektor hybnosti  $P_{\text{foton}}$  fotónu má rovnaký tvar, len energia  $E$  a hybnosť  $\mathbf{p}$  sú určené vlnovou dĺžkou  $\lambda$

$$P_{\text{foton}} = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left( \frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda} s_x, \frac{h}{\lambda} s_y, \frac{h}{\lambda} s_z \right), \quad (2.2)$$

kde  $h$  je Planckova konštanta a  $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$  je vektor smeru pohybu fotónu dĺžky 1.

Pred zrážkou je 4-vektor hybnosti fotónu

$$P_{f,0} = \left( \frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda}, 0, 0 \right), \quad (2.3)$$

a 4-vektor hybnosti sondy

$$P_{s,0} = \left( \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right). \quad (2.4)$$

Po zrážke je 4-vektor hybnosti fotónu

$$P_{f,1} = \left( \frac{h}{\lambda'}, -\frac{h}{\lambda'}, 0, 0 \right), \quad (2.5)$$

a 4-vektor hybnosti sondy

$$P_{s,1} = \left( \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, \frac{mv'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, 0, 0 \right). \quad (2.6)$$

Keďže sa celkový 4-vektor hybnosti zachováva<sup>4</sup>, dostaneme rovnicu

$$P_{f,0} + P_{s,0} = P_{f,1} + P_{s,1}, \quad (2.7)$$

$$\left( \frac{h}{\lambda} + \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{h}{\lambda} + \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right) = \left( \frac{h}{\lambda'} + \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, -\frac{h}{\lambda'} + \frac{mv'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, 0, 0 \right). \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

Vzniká sústava 2 rovníc o 2 neznámých (nová vlnová dĺžka odrazeného fotónu  $\lambda'$  a nová rýchlosť sondy  $v'$ ). Keďže sa nás zaujíma iba druhá premenná, môžeme sa prvej premennej zbaviť sčítaním rovníc

$$\frac{2h}{\lambda} + \frac{m(c + v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m(c + v')}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad (2.10)$$

<sup>4</sup>Môžeme si všimnúť, že zákon zachovania 4-vektora hybnosti v prvej súradnici zodpovedá zákonu zachovania energie a vo zvyšných súradniciach zodpovedá zákonu zachovania hybnosti. Preto sa k tejto sústave rovníc vieme dostať aj bez použitia 4-vektorov, ak nahradíme v zákonoch zachovania z klasickej fyziky hybnosť a energiu ich relativistickými verziami.

Keďže je energia jedného fotónu omnoho menšia od energie sondy, môžeme predpokladať, že sa rýchlosť sondy zmení iba minimálne  $v' = v + \delta v$ . Použitím aproximácie 1. rádu pre  $\delta v \ll v < c$  dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} + \frac{\delta v}{c}\right)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2v}{c^2}\delta v}} \approx \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{2v}{c^2 - v^2}\delta v\right)}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v}{c^2 - v^2}\delta v\right). \quad (2.11)$$

Dosadením do rovnice dostaneme zmenu rýchlosti  $\delta v$

$$\delta v = \frac{2h}{\lambda m} \frac{c - v}{c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.12)$$

Na danom vzťahu vidíme, že sonda bude pri väčších rýchlostiach urýchlená pomalšie kvôli relativistickému faktoru (faktor  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ), ale zároveň kvôli zmene vnímanej vlnovej dĺžky fotónu (faktor  $\frac{c-v}{c}$ ).

Keď už poznáme, ako sa zmení rýchlosť sondy po zrážke s jedným fotónom, musíme určiť, koľko fotónov sondu zasiahne za jednotku času. Ak lasery majú výkon  $P$  a energia jedného fotónu je  $\frac{hc}{\lambda}$ , tak za čas  $\Delta t$  lasery vyprodukujú konštantný počet fotónov  $\Delta N$  zodpovedajúci tomuto výkonu

$$\Delta N = \frac{P\Delta t}{E_{\text{foton}}} = \frac{P\lambda}{hc}\Delta t. \quad (2.13)$$

Tieto fotóny idú rýchlosťou svetla  $c$  v smere osi  $x$ . Zodpovedajú konštatnému prúdu častíc. Ak by sa sonda nehýbala, tak za čas  $\Delta t$  ňou prejde  $\Delta N$  častíc. Keď sa sonda hýbe rýchlosťou  $v$  v smere osi  $x$ , tak ňou prechádza menší prúd častíc.<sup>5</sup> V extrémnom prípade pri rýchlosti sondy  $v = c$  by ju nezasiahli už žiadne fotóny. Preto počet fotónov dopadajúcich na sondu je zmenšený faktorom  $\frac{c-v}{c}$  a dostaneme

$$\Delta N_{\text{sonda}} = \frac{P\lambda}{hc} \frac{c - v}{c} \Delta t. \quad (2.14)$$

Preto celková zmena rýchlosti sondy  $\Delta v$  za čas  $\Delta t$  je

$$\Delta v = \Delta N_{\text{sonda}} \delta v = \frac{2P}{mc} \left(\frac{c - v}{c}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t. \quad (2.15)$$

Ak zanedbáme skokový nárast rýchlosti pri každej zrážke s fotónmi, tak dostaneme rovnicu pre zrýchlenie sondy

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2P}{mc} \left(\frac{c - v}{c}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.16)$$

Môžeme si všimnúť, že zrýchlenie nezávisí od vlnovej dĺžky fotónov, ale iba od celkového výkonu lasera. Je to kvôli tomu, že laser s polovičnou vlnovou dĺžkou vyprodukuje pri rovnakom výkone polovičný počet fotónov, ale tie majú dvojnásobnú hybnosť a pôsobia dvojnásobnou silou pri odraze a tieto dva efekty sa vyrušia.

<sup>5</sup>Ide o ten istý princíp, ako keby sme mali vietor a veternú vrtuľu. Ak vrtuľa stojí, tak cíti nápor vetra. Ak by sme vrtuľou hýbali v smere pohybu vetra, bude na vrtuľu menší nápor. Ak by išli vrtuľa presne rýchlosťou vetra, tak by cítila bezvetrie.

Pre jednoduchosť, je lepšie pracovať v relativite s rýchlosťou v jednotkách  $c$ . Po zavedení rýchlosti  $\beta = \frac{v}{c}$ , dostaneme vzťah

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dv}{dt} = \frac{2P}{mc^2} (1 - \beta)^2 (1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (2.17)$$

Separáciou premenných a integráciou oboch strán dostaneme vzťah medzi rýchlosťou  $\beta$  a časom  $t$ <sup>6</sup>

$$t = \frac{mc^2}{2P} \left[ \frac{(2 - \beta)(1 + \beta)}{3(1 - \beta)(1 - \beta^2)^{1/2}} - \frac{2}{3} \right]. \quad (2.18)$$

Vzťah určuje implicitnú funkciu  $\beta(t)$ . Pre výpočet vzdialenosti  $d$  potrebujeme ešte raz zintegrovat' rýchlosť. Keďže poznáme  $t(\beta)$  a nie  $\beta(t)$ , tak použijeme trik per partes

$$d = \int v dt = c \int \beta dt = c \left[ \beta t(\beta) - \int t(\beta) d\beta \right]. \quad (2.19)$$

Po dosadení vzťahu  $t(\beta)$  a následnej integrácie dostaneme vzťah<sup>7</sup>

$$d = \frac{mc^3}{2P} \left[ \frac{(2\beta - 1)(1 + \beta)}{3(1 - \beta)(1 - \beta^2)^{1/2}} + \frac{1}{3} \right]. \quad (2.20)$$

Pre kontrolu, pre malé rýchlosti ide o zrýchlenie s konštantným zrýchlením  $\frac{2P}{mc}$ . Pre  $\beta \ll 1$  sa oba vzťahy zjednodušia na

$$t \approx \frac{mc}{2P} c\beta, \quad d \approx \frac{mc}{2P} \frac{c^2 \beta^2}{2}, \quad (2.21)$$

čo zodpovedá správne vzťahom pre rovnomerné zrýchlenie

$$t = \frac{1}{a} v, \quad d = \frac{1}{a} \frac{v^2}{2}, \quad (2.22)$$

kde rýchlosť  $v = c\beta$  a zrýchlenie  $a = \frac{2P}{mc}$ .

Naopak, pre veľmi veľké rýchlosti blízke rýchlosti svetla  $\beta \approx 1$  sa oba vzťahy zjednodušia na

$$t \approx \frac{mc^2}{2P} \frac{\sqrt{2}}{3(1 - \beta)^{3/2}}, \quad d \approx \frac{mc^3}{2P} \frac{\sqrt{2}}{3(1 - \beta)^{3/2}}, \quad (2.23)$$

a sonda prejde danú vzdialenosť prakticky za rýchlosť svetla  $d \approx ct$ .

Pre zadané hodnoty dostaneme numericky zo vzťahu (2.20) rýchlosť sondy  $\beta = 0,482$  a priamo dosadením do vzťahu (2.18) dostaneme čas  $t = 14,1$  y, čo je prekvapivo dosiahnuteľné v rámci života človeka. Už len sa naučiť brzdiť.

<sup>6</sup>Detailnejší postup integrovania: Najprv zavedieme substitúciu  $\beta = \sin \alpha$ , kvôli členu  $(1 - \beta^2)^{1/2}$ . Potom použijeme substitúciu  $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ , ktorá funguje vždy, keď integrovaná funkcia má tvar zlomku  $\frac{P(\sin \alpha, \cos \alpha)}{Q(\sin \alpha, \cos \alpha)}$ , kde  $P$  a  $Q$  sú polynomiálne funkcie. A následne integrujeme lomenú funkciu, ktorú iba rozdelíme na parciálne zlomky a integrujeme každý člen.

<sup>7</sup>Detailný postup integrácie je rovnaký ako pri integrovaní  $\beta(t)$ .



### 1.3 3D kmity s 3 pružinami

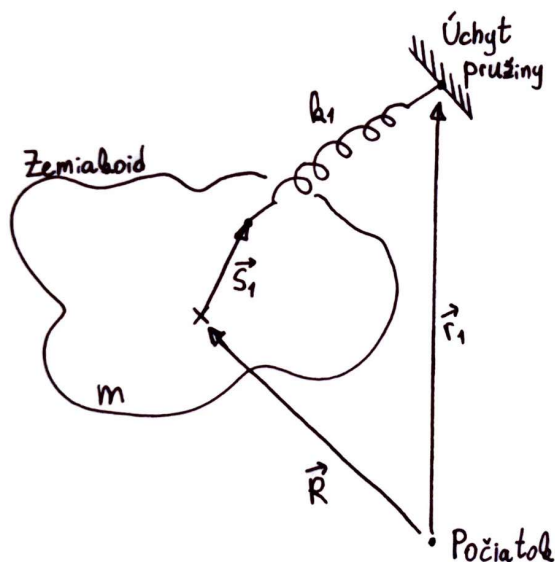
**Zadanie.** a) Na hmotný bod o hmotnosti  $m$  sú pripevnené tri pružiny s nulovou pokojovou dĺžkou a tuhosťami  $k_1, k_2$  a  $k_3$ . Tie pružiny su upevnené na steny jaskyne v bodoch  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  a  $\mathbf{r}_3$ . Tiažové zrýchlenie je  $\mathbf{g}$ . Nájdite rovnovážnu polohu  $\mathbf{R}_r$  hmotného bodu a nájdite periódu kmitov okolo neho.

b) Majme rovnakú situáciu ako v a), ale namiesto hmotného bodu sa jedná o tuhé teleso (takzvaný všeobecný zemiakoid). Označme polohu jeho ťažiska ako  $\mathbf{R}$  a body, v ktorých su pružiny upevnené na zemiakoid ako  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  a  $\mathbf{s}_3$  (merané vzhľadom na ťažisko v rovnovážnej polohe). Aká musí platiť podmienka, aby bol pohyb ťažiska  $\mathbf{R}$  totožný tomu v časti a), teda aby pohyb ťažiska nezávisel od rotačného pohybu?

Nápoveda: Pokiaľ nemáte skúsenosti s maticami, tak predpokladajte malé uhly rotácie od rovnovážnej polohy.

c) Predpokladajte, že niekto nám zemiakoid ošúpal na tvar gule (homogénnej) s momentom zotrvačnosti  $I$  a pripevnil naň pružiny tak aby platila podmienka z b). Ukážte, že v tomto prípade bude aj rotačný pohyb nezávislý od translačného. Okolo akej osi máme rotačne vychýliť guľu o malý uhol aby vykonávala harmonické rotačné kmity okolo tejto osi?

V celej úlohe predpokladajte, že pružiny ani závažie nenarazia do skaly.



Obrázok 3.1: Náčrt s vyznačenou jednou pružinou.

**Riešenie.** (Autor riešenia: Ronald)

opravuje Ronald ([ronald.dobos@trojsten.sk](mailto:ronald.dobos@trojsten.sk))

a) V tejto úlohe je dôležité využiť vektorové značenie, vypisovanie  $x, y, z$  zložiek síl by nás stálo veľa času a zrozumiteľnosti. Každá pružina pôsobí silou veľkosti  $F = kx$ , kde  $x$  je jej dĺžka a  $k$  jej tuhosť. Zároveň sila smeruje

pozdlž pružiny, takže môžeme písať  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ . V rovnovážnej polohe musí platiť, že súčet síl je nulový:

$$\begin{aligned} m\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 &= m\mathbf{g} + \sum_{i=1}^3 k_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_r) = 0 \\ \implies \mathbf{R}_r &= \frac{m\mathbf{g} + k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2 + k_3\mathbf{r}_3}{k_1 + k_2 + k_3}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ak hmotný bod vychýlime o malé  $\delta\mathbf{R}$  z rovnovážnej polohy, tak bude platiť, že:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \delta\mathbf{R} &= m\mathbf{g} + \sum_{i=1}^3 k_i (\mathbf{r}_i - (\mathbf{R}_r + \delta\mathbf{R})), \\ m \frac{d^2}{dt^2} \delta\mathbf{R} &= - \left( \sum_{i=1}^3 k_i \right) \delta\mathbf{R}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde pri prechode do druhého riadku sme použili 3.1. Toto je klasická pohybová rovnica harmonického oscilátora (akurát pre vektorovú polohu) a tak platí, že perióda kmitov je:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2 + k_3}}. \quad (3.3)$$

b) Rovnako ako v minulej podúlohe chceme nájsť silu ako funkciu pozície, a tentokrát aj rotácie telesa. Označme translačnú výchylku ťažiska znovu ako  $\delta\mathbf{R}$  a tentokrát aj výchylku polohy úchyty pružín (vzhľadom na ťažisko) ako  $\delta\mathbf{s}_i$ . Pre malé uhly rotácie  $\delta\theta$  vieme, že výchylka je kolmá na pôvodný vektor a síce:

$$\delta\mathbf{s}_i = \delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{s}_i, \quad (3.4)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor osi otáčania. Skúsenejší môžu namiesto toho použiť rotačnú maticu  $\mathbf{M}$  a vzorec  $\delta\mathbf{s}_i = (\mathbf{M} - \mathbf{I})\mathbf{s}_i$ . Podobne ako minule bude teraz sila:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \delta\mathbf{R} &= m\mathbf{g} + \sum k_i [\mathbf{r}_i - (\mathbf{R}_r + \delta\mathbf{R}) - (\mathbf{s}_i - \delta\mathbf{s}_i)] \\ &= - \sum k_i \delta\mathbf{R} - \sum k_i \delta\mathbf{s}_i \\ &= - \sum k_i \delta\mathbf{R} - \sum k_i \delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{s}_i = - \sum k_i \delta\mathbf{R} - \delta\theta \mathbf{n} \times \sum k_i \mathbf{s}_i. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Teraz vidíme, že pokiaľ platí

$$\sum k_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

tak bude pohybová rovnica rovnaká ako v časti a), teda translačný pohyb bude nezávislý od rotačného.

c) Tentokrát sa musíme zamyslieť nad momentmi síl, tie sú v rovnovážnej polohe:

$$\boldsymbol{\tau}(\text{v rovnováhe}) = \sum \mathbf{s}_i \times [k_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R} - \mathbf{s}_i)] = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Označme  $\delta\theta = \delta\theta \mathbf{n}$ . Teraz znovu napíšeme malú výchylku ako  $\delta\mathbf{R}$  a  $\delta\mathbf{s}_i$  a pozrime sa, čo sa stane s rovnicou:

$$\begin{aligned}
 \tau(\text{po vychýlení}) &= \sum (\mathbf{s}_i + \delta\mathbf{s}_i) \times \{k_i[\mathbf{r}_i - (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) - (\mathbf{s}_i + \delta\mathbf{s}_i)]\} \\
 &= \sum k_i \mathbf{s}_i \times [\mathbf{r}_i - (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) - (\mathbf{s}_i + \delta\mathbf{s}_i)] + \sum k_i \delta\mathbf{s}_i \times [\mathbf{r}_i - (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) - \mathbf{s}_i] \\
 &= - \sum k_i \mathbf{s}_i \times (\delta\mathbf{R} + \delta\mathbf{s}_i) + \sum k_i \delta\mathbf{s}_i \times [\mathbf{r}_i - (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) - \mathbf{s}_i] \\
 &= \delta\mathbf{R} \times \left(\sum k_i \mathbf{s}_i\right) + \sum k_i (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) \times \delta\mathbf{s}_i + \sum k_i \delta\mathbf{s}_i \times \mathbf{r}_i \\
 &= (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) \times \left(\sum k_i \delta\theta \times \mathbf{s}_i\right) + \sum k_i (\delta\theta \times \mathbf{s}_i) \times \mathbf{r}_i \\
 &= (\mathbf{R} + \delta\mathbf{R}) \times [\delta\theta \times \sum k_i \mathbf{s}_i] + \sum k_i \mathbf{s}_i (\mathbf{r}_i \cdot \delta\theta) - \sum k_i \delta\theta (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_i) \\
 &= - \underbrace{\left[\sum k_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_i)\right]}_{\text{konštanta}} \delta\theta + \sum k_i \mathbf{s}_i (\mathbf{r}_i \cdot \delta\theta)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Prvé 3 červené členy v druhom riadku sa vynulujú vďaka rovnovážnej podmienke 3.7 a posledný člen vďaka tomu, že  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$  pre ľubovoľný vektor. V treťom riadku sa dva vyznačené členy navzájom vynulujú. Vo štvrtom riadku je červený člen presne podmienka z časti b), ktorá je podľa zadania rovná nule. Pri prechode do 6. riadku sme použili všeobecne platný vzorec  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ .

Prv oceňme fakt, že podmienka  $\sum k_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$  implikuje nielen, že translacný pohyb bude nezávislý od rotačného, ale aj naopak, teda že rotačný bude nezávislý od translacného - v poslednom riadku sa nenachádza  $\delta\mathbf{R}$ .

Rotačná pohybová rovnica je:

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{d}{dt} \mathbf{L} \\
 \mathbf{L} &= I \frac{d}{dt} \delta\theta
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ale keďže je teleso guľa, tak vieme, že  $I$  je skalár (resp. násobok jednotkovej matice), a teda  $\tau = I \frac{d^2}{dt^2} \delta\theta$ . Na to, aby sme dostali harmonické rotačné kmity, musí platiť  $\tau = -I\omega^2 \delta\theta$ , to by napríklad platilo, ak by druhý člen v 3.8 bol nulový:

$$\begin{aligned}
 \sum k_i \mathbf{s}_i (\mathbf{r}_i \cdot \Delta\theta) &= \mathbf{0}, \text{ ale z podmienky už vieme, že } \sum k_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0} \\
 \implies (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}) &= (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n}) \dots (\text{rovnaké pre všetky pružiny } i)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Z toho môžeme sformulovať dve nezávislé lineárne rovnice:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\
 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{n} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ktoré majú vždy riešenie, napríklad:

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)\|} \tag{3.12}$$

Toto nie je validné riešenie jedine vtedy, keď sú  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  a  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)$  rovnobežné (teda keď úchyty pružín ležia na jednej priamke), to ale znamená, že vtedy môžeme vybrať ľubovoľné  $\mathbf{n}$  ležiace v rovine kolmej na ne.

Periódou tohto harmonického pohybu je potom:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\sum k_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_i)}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_1) + k_2(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s}_2) + k_3(\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{s}_3)}} \quad (3.13)$$