

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Škvarková

vzorák **Jakub**, opravoval **Jakub** (jakocak@gmail.com)

Najprv si zistíme efektívnu hrúbku atmosféry. Tlak na zemi zodpovedá hydrostatickému tlaku vzduchu nad ňou. Skutočná atmosféra má premenlivú hustotu, teplotu, tlak a zloženie s výškou. Plynule redne a prechádza do vesmíru s veľmi riedkou hustotou molekúl. Preto si vystačíme so zjednodušením, že atmosféra je homogénna čo do hustoty, teploty a zloženia (efektívne sa správa ako veľmi riedky oceán a my sme morské živočíchy na jeho dne) a z tlaku vieme vypočítať jej výšku H ako

$$p = H\rho g \implies H = \frac{p}{\rho g} \approx 8,6 \text{ km}.$$

Táto hodnota zodpovedá dobrému rádovému dolnému odhadu výšky atmosféry (vo výške $\approx 8 \text{ km}$ má atmosféra polovičný tlak, vo výške $\approx 14 \text{ km}$ štvrtinový).

Ako svetlo prechádza vrchnými vrstvami atmosféry, časť je rozptýlená a intenzita nerozptýleného svetla klesá, čím sa svetlo dostáva bližšie ku povrchu Zeme. Najprv musíme vypočítať, koľko svetla rozptýli jedna molekula vzduchu.

Celú konštantnú časť môžeme zdefinovať ako novú konštantu A .

$$A := \frac{1}{\lambda^4} \left[\frac{3\pi}{\rho_N} \frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 2)} \right]^2 \approx 6,65 \cdot 10^{-31} \text{ m}^2$$

Smer rozptylu je určený 2 sférickými uhlami: θ (uhol medzi svetlom prichádzajúcim a rozptýleným) a φ (natočenie roviny, v ktorej sa oba smery nachádzajú). Infinitesimálny priestorový uhol $d\Omega$ v týchto súradniciach je

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Aby sme dostali celkovú intenzitu rozptýleného svetla, musíme preintegrovať diferenciálnu intenzitu cez všetky priestorové uhly.

$$I_S = \int_{\Omega} \frac{dI_S}{d\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} I \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} A d\Omega = \frac{IA}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Po výpočte dvojitého integrálu (ktorý sa rozpadne na súčin 2 jednorozmerných integrálov) dostaneme

$$I_S = \frac{IA}{2} \left[-\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{3} IA.$$

Intenzita rozptylu je úmerná intenzite dopadajúceho svetla. Ich relatívny pomer sa nazýva účinný prierez σ a udáva pravdepodobnosť rozptylu. Má rozmer plochy a dá sa interpretovať ako efektívna plocha, ktorú musí dopadajúce svetlo trafiť, aby rozptyl nastal.

$$\sigma = \frac{I_S}{I} = \frac{8\pi}{3} A \approx 5,57 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2.$$

To je však iba rozptyl na jednej molekule. V atmosfére ich máme viac. Ak vynásobíme účinný prierez hustotou počtu molekúl, tak dostaneme veličinu s rozmerom m^{-1} , ktorá vyjadruje účinnosť rozptylu na dĺžku l prejdenej atmosféry. Keďže intenzita bude znížená o toto rozptýlené svetlo, zodpovedá to relatívnemu poklesu intenzity svetla v médiu (Lambertov-Beerov zákon)

$$\frac{dI}{I} = -\sigma \rho_N dl \implies I = I_0 e^{-\sigma \rho_N l}.$$

Odvodili sme teda intenzitu nerozptýleného svetla v atmosfére. Na vrchu atmosféry je intenzita I_0 a po prejdenej dĺžky l atmosférou je intenzita zoslabená na I . Ak si definujeme výšku od zeme ako z ($z = 0$ zodpovedá zemi a $z = H$ zodpovedá hornej vrstve atmosféry), tak pri zenitovom uhle dopadu α bude intenzita vo výške z zodpovedať vzťahu

$$I(z) = I_0 e^{-\frac{\sigma \rho_N (H-z)}{\cos \alpha}}.$$

Ak máme na zemi ($z = 0$) plochu veľkosti S , tak intenzita priameho UV žiarenia na túto plochu bude

$$I_{\text{direct}} = I(0) S \cos \alpha = I_0 S \cos(\alpha) e^{-\frac{\sigma \rho_N H}{\cos \alpha}}.$$

Faktor $\cos(\alpha)$ zodpovedá efektu, že plocha S na zemi s pohľadu Slnka je pod uhlom a efektívne má menší povrch.

Pre intenzitu rozptýleného UV žiarenia potrebujeme spočítať celkovú intenzitu rozptýleného svetla z celej atmosféry na danú plochu S . To znie na prvý pohľad ako komplikovaný integrál cez všetky možné rozptylové centrá.

Predpokladajme, že naša plocha S je relatívne (skoro nekonečne) malá a nachádza sa v bode $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. V súradniciach (x, y, z) sa nachádza malý objem atmosféry $dV = dx dy dz$, v ktorom je $dN = \rho_N dV$ molekúl. Svetlo prechádzajúce týmto objemom sa rozptýli do všetkých smerov, ale nás bude zaujímať iba rozptyl smerom na plochu S do malého priestorového uhla Ω_S , ktoré zodpovedá ploche S z pohľadu bodu (x, y, z) . Príspevok rozptylu je teda

$$dI_{\text{indirect}} = \rho_N dV I(z) \frac{1 + \cos^2 \theta_S}{2} A \Omega_S,$$

kde θ_S je uhol rozptylu smerom na plochu S . Preintegrujeme teda cez celý objem atmosféry príspevky rozptylu.

$$I_{\text{indirect}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^H dx dy dz \rho_N I(z) \frac{1 + \cos^2 \theta_S}{2} A \Omega_S$$

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že Slnko svieti na Zem v smere vektora $\mathbf{v}_1 = (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$. Po rozptyle musí mať smer od bodu (x, y, z) do bodu $(0, 0, 0)$, teda v smere vektora $\mathbf{v}_2 = (-x, -y, -z)$. Potom vieme $\cos \theta_S$ vypočítať zo skalárneho súčinu týchto vektorov

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2| \cos \theta_S \implies \cos \theta_S = -\frac{x \sin \alpha + z \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Na výpočet priestorového uhla Ω_S musíme najprv vypočítať zdanlivú veľkosť plochy S a vydeliť ju druhou mocninou vzdialenosti plochy od bodu (x, y, z) (priestorový uhol predstavuje plochu na povrchu jednotkovej gule, preto pri preškálovaní plochy na vzdialenosť 1 treba plochu vydeliť R^2). Plocha S má normálu $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ a smer od bodu $(0, 0, 0)$ do bodu (x, y, z) je $\mathbf{v}_4 = (x, y, z)$. Plocha sa javí menšia lebo sa na ňu pozerá pod uhlom. Je zmenšená o faktor $\cos \Theta$, kde uhol Θ je uhol medzi vektormi $\mathbf{v}_3$ a $\mathbf{v}_4$. Použitím

skalárneho súčinu dostaneme

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_4}{|\mathbf{v}_3||\mathbf{v}_4|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Priestorový uhol Ω_S je potom

$$\Omega_S = \frac{S \cos \Theta}{R^2} = \frac{Sz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Keď dosadíme všetky vzťahy do rovnice pre intenzitu rozptýleného UV žiarenia, tak dostaneme

$$I_{indirect} = \frac{1}{2} \rho_N I_0 S A \int_0^H dz e^{-\frac{\sigma \rho_N (H-z)}{\cos \alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left[1 + \frac{(x \sin \alpha + z \cos \alpha)^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right] \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Opakovaným použitím nasledujúcich integrálov

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \frac{\pi}{2a^3} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \frac{\pi}{2a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \frac{2}{a^2} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} dx &= \frac{4}{3a^4} \end{aligned}$$

nakoniec dostaneme

$$I_{indirect} = I_0 S \cos(\alpha) \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\sigma \rho_N H}{\cos \alpha}} \right).$$

Intenzitu rozptýleného UV žiarenia sa však dá vypočítať aj bez týchto integrálov. Ak sa vrátíme k pôvodnému vzťahu

$$I_{indirect} = S \rho_N \int_0^H dz e^{-\frac{\sigma \rho_N (H-z)}{\cos \alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 \frac{1 + \cos^2 \theta_S}{2} A \frac{\cos \Theta}{R^2} dx dy.$$

Môžeme si všimnúť, že člen $\frac{\cos \Theta}{R^2} dx dy$ zodpovedá priestorovému uhlu plochy $dx dy$ z pohľadu bodu $(0, 0, 0)$. Ide teda efektívne o $d\Omega$. Druhý integrál je pôvodne celková intenzita rozptýleného svetla dopadajúceho pod uhlom α na body roviny (x, y, z) do bodu $(0, 0, 0)$, ale dá sa tiež interpretovať ako intenzita rozptýleného svetla dopadajúceho pod uhlom α na bode $(0, 0, 0)$ do všetkých bodov roviny (x, y, z) . Táto rovina predstavuje presne polovicu celkového priestorového uhla. Vďaka istej symetrii (intenzita rozptylu do opačných smerov je rovnaká) vieme povedať, že druhý integrál je polovica intenzity celkového rozptýleného svetla.

$$I_{indirect} = S \rho_N \int_0^H dz e^{-\frac{\sigma \rho_N (H-z)}{\cos \alpha}} \frac{1}{2} \frac{8\pi}{4} I_0 A$$

Dopočítaním jednoduchého integrálu tak dostaneme

$$I_{indirect} = S \rho_N \frac{1}{2} \frac{8\pi}{4} I_0 A \left[\frac{\cos \alpha}{\sigma \rho_N} e^{-\frac{\sigma \rho_N (H-z)}{\cos \alpha}} \right]_0^H = I_0 S \cos(\alpha) \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\sigma \rho_N H}{\cos \alpha}} \right).$$

Na plochu teda dopadne polovica inak rozptýleného žiarenia.

Riešenie bez veľa integrálov

Celý proces rozptylu vie byť veľmi komplikovaný, ale ak sa naň pozrieme z makroskopického hľadiska, tak sa dá jednoducho pochopiť. Svetlo sa nikde neakumuluje, preto platí, že čo do atmosféry vstúpi, tak z nej aj vystúpi. Celkový tok do a z atmosféry sa dá rozdeliť na:

- $I_0 \cos \alpha$ – intenzita svetla, ktorá vstupuje do atmosféry v jej vrchnej vrstve (faktor $\cos \alpha$ je tu kvôli tomu, že svetlo nedopadá na vrchnú vrstvu atmosféry kolmo),
- I_{direct} – intenzita svetla, ktoré vystupuje z atmosféry v jej spodnej vrstve a nebolo rozptýlené,
- $I_{indirect}$ – intenzita svetla, ktoré vystupuje z atmosféry v jej spodnej vrstve a bolo raz rozptýlené,
- I_{space} – intenzita svetla, ktoré vystupuje z atmosféry v jej vrchnej vrstve a bolo raz rozptýlené (smeruje do vesmíru).

Zo zákona zachovania energie je súčet vstupných tokov rovný súčtu výstupných tokov.

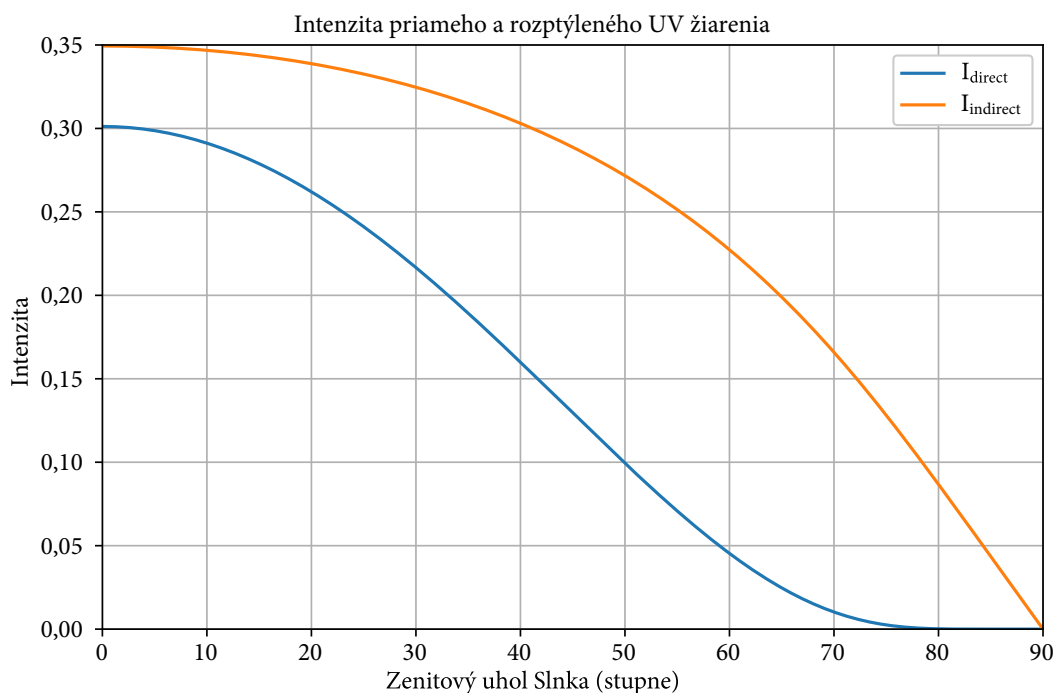
$$I_0 \cos \alpha = I_{direct} + I_{indirect} + I_{space}.$$

Dodatočne vieme, že Rayleighov rozptyl v smere θ a $180^\circ - \theta$ majú rovnakú intenzitu (keďže vzťah závisí iba na faktore $\cos^2 \theta$). Tieto dva smery sú si navzájom opačné, takže množstvo rozptýleného svetla do spodnej vrstvy (na Zem) sa rovná množstvu rozptýleného svetla do vrchnej vrstvy (do vesmíru). Platí teda $I_{indirect} = I_{space}$. Intenzitu I_{direct} sme už vypočítali v predchádzajúcej časti. Ak dáme tieto dve informácie dokopy, tak dostaneme

$$I_{direct} = I_0 \cos(\alpha) e^{-\frac{\sigma \rho_N H}{\cos \alpha}},$$

$$I_{indirect} = \frac{I_0 \cos \alpha - I_{direct}}{2} = \frac{1}{2} I_0 \cos(\alpha) \left(1 - e^{-\frac{\sigma \rho_N H}{\cos \alpha}}\right).$$

Ak si zobrazíme závislosť intenzít pre parameter $\sigma \rho_N H \approx 1,20$ (obrázok 2.1.1), tak vidíme, že rozptýlená intenzita je väčšia ako priama intenzita a dá sa teda opáliť nie len z priameho slnka, ale aj z rozptýleného svetla z oblohy.



Obrázok 2.1.1: Závislosť priameho a nepriameho žiarenia na Zemi na zenitovom uhle α .

V realite je situácia komplikovanejšia a to z týchto dôvodov:

- Atmosféra nie je homogénna, statická, nemá rovnakú teplotu, tlak a zloženie s výškou. Žiarenie bude rozptýlené nerovnomerne a v rôznych výškach.
- Svetlo sa môže rozptyľovať neobmedzene veľa krát. To by však vyžadovalo postupne pridávať intenzity svetla po viacerých rozptyloch a znižovať intenzitu rozptýleného svetla.
- Atmosféra obsahuje aj veľa častíc (vodné kvapky, oblaky, opar) väčších ako vlnová dĺžka svetla. Rozptyl na týchto časticiach sa neriadi podľa Rayleighovho rozptylu alebo podľa Mieovho rozptylu alebo optického rozptylu (kvôli tomu sú oblaky biele).
- Častice a molekuly atmosféry (kvapky, oxidu uhličité, ozón, vodná para atď.) môžu svetlo absorbovať, čo môže spôsobiť pokles intenzít.
- Rayleighov rozptyl závisí veľmi silne na vlnovej dĺžke žiarenia. Opálenie a spálenie spôsobujú celé úseky vlnových dĺžok, ktoré sa prelínajú, ale nie sú totožné.
- V realite sú okolo vás ďalšie objekty (budovy, stromy, slnečníky atď.), ktoré blokujú časť oblohy (znižujú intenzitu rozptýleného svetla) alebo svetlo odrážajú (zvyšujú intenzitu rozptýleného svetla).

Long story short, natierajte sa opaľovacím krémom vždy.

2.2 Triková

vzorák **Lego**, opravoval **Lego** (simon.pajger@trojsten.sk)

Trenie okolo valca

Pozrieme sa na kúsok lana, ktoré zaberá uhol $d\alpha$. Pre dostatočne malé $d\alpha$ sa pnutie v lane pozdĺž tejto dĺžky skoro nezmení, označme si ho T . Potom silu, ktorou je tento kúsok lana pritláčaný k valcu, dostaneme z toho, že oba jeho konce sú ťahané silou T v smere dotyčníc k valcu v daných bodoch. Priemet každej z týchto síl do smeru pritláčajúceho lana k valcu je $F_N = T \sin(d\alpha/2) \approx T/2 d\alpha$, kde sme využili, že pre malé uhly $\sin x = x$. Zároveň v sínuse vystupuje polovičný uhol preto, lebo to je uhol od stredu toho kúska lana po okraj, zatiaľčo $d\alpha$ je od jedného okraja po druhý. Nesmieme zabudnúť na to, že tieto priemety sú 2, takže celková sila pritlačenia je $F = 2F_N = T d\alpha$. Kolmo na pritlačnú silu F pôsobí trecia sila $dF_T = f T d\alpha$. Práve o túto hodnotu sa môže maximálne zmeniť pnutie dT pozdĺž tohto kúska lana v statickej situácii. Dostávame teda diferenciálnu rovnicu

$$dT = -f T d\alpha$$

$$\int_{mg}^F \frac{dT}{T} = \int_0^\alpha -f d\alpha$$

$$\ln\left(\frac{F}{mg}\right) = -f\alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{f} \ln\left(\frac{mg}{F}\right).$$

Tu si len treba dať pozor na znamienko: zadanie hovorí, že sila akurát stačí na to, aby závažie udržala (čiže ak by bola sila menšia alebo závažie ťažšie, už by ho neudržala). Pnutie v lane teda klesá z hodnoty mg až na hodnotu F (to hovorí druhý riadok tohto výpočtu).

Dodáme, že odvodený vzťah sa nazýva aj „Capstan equation“ (navijákový zákon), keďže sa používa na lodiach pri navijakoch, ktoré dokážu znásobiť ťažnú silu. Niektorí riešitelia zvládli najsť práve tento vzťah.

Fata Morgana

Lego pozerá pod uhlom $\beta_0 = \alpha/250$ „nadol“ oproti vodorovnému smeru¹. Index lomu sa mení v závislosti na výške, čiže „kolmica“ k „rozhraniu“ je zvislý smer, uhol voči zvislému smeru je $\pi/2 - \beta$. Potom zo Snellovho zákona dostaneme

$$n(h_0) \sin(\pi/2 - \beta_0) = n(h) \sin(\pi/2 - \beta(h))$$

$$n(h_0) \cos \beta_0 = n(h) \cos \beta(h)$$

$$\cos \beta(h) = \frac{n_0}{1 - kh_0} \frac{1 - kh}{n_0} \cos \beta_0.$$

Už uhol β_0 je dosť malý, čiže $\cos \beta_0$ je skoro 1 a ako sa bude lúč blížiť k zemi, zlomok $(1 - kh)/(1 - kh_0)$ bude väčší než 1 a bude rásť, až v nejakom bude dostaneme, že $\cos \beta(h) = 1$, vtedy sa lúč „otočí“ a ďalej pôjde zrkadlovo zas nahor. Chceme teda najsť horizontálnu vzdialenosť k tomuto bodu obratu a vynásobiť ju 2. Buď môžeme riešiť diferenciálnu rovnicu, alebo (ako názov úlohy napovedá) najsť nejaký trik.

¹Faktor 250 bol zvolený preto, aby uhly v každej podúlohe mohli byť realistické.

Konkrétne si uvedomíme, aká je definícia sínusu: y-ová súradnica bodu na jednotkovej kružnici, ktorý zo stredu vidíme pod príslušným uhlom. No a nám sa hodnota kosínu mení lineárne v závislosti od aktuálnej výšky. Teraz sa už len zamyslieť nad všetkými posunmi, otočeniami a preškálovaniami tej kružnice. Výšku stredu kružnice dostaneme ako také h , pre ktoré by šiel lúč zvislo nadol a teda pre ktorú platí

$$0 = \cos \beta(h_s) = \frac{1 - kh_s}{1 - kh_0} \cos \beta_0 \rightarrow h_s = \frac{1}{k}.$$

Zároveň pre kružnicu platí, že polomer je vždy kolmý k dotyčnici v danom bode, čiže keď si predstavíme priamku idúcu z Legových očí kolmo na smer ktorým pozerá, tak táto priamka prechádza stredom kružnice po ktorej lúč pôjde.

Čiže máme 2 priamky na ktorých leží stred, tým pádom ho vieme nájsť. Konkrétne nás zaujíma horizontálna vzdialenosť medzi stredom kružnice a Legovými očami (lebo „bod obratu lúču“ je zvislo pod stredom kružnice). Ich zvislá vzdialenosť je $h_s - h_0$ a z trigonometrie je pomer medzi zvislou a horizontálnou vzdialenosťou daný tangensom β_0 (treba využiť zhodnosť uhlov medzi dvoma kolmými dvojicami priamok). A pripomínam, že vzdialenosť k autu je dvojnásobok tejto horizontálnej vzdialenosti, čiže

$$\Delta x = 2(h_s - h_0) \tan \beta_0.$$

Problém je, že h_0 nemáme zadané. Na druhej strane, pre nejaké realistické hodnoty k bude výška $1/k$, v ktorej by lúč šiel zvislo zrejme celkom astronomická (doslova) a teda ľudská výška bude oproti nej celkom zanedbateľná a teda nám stačí písať $\Delta x \approx 2h_s \tan \beta_0$.

Lietanie medzi autami

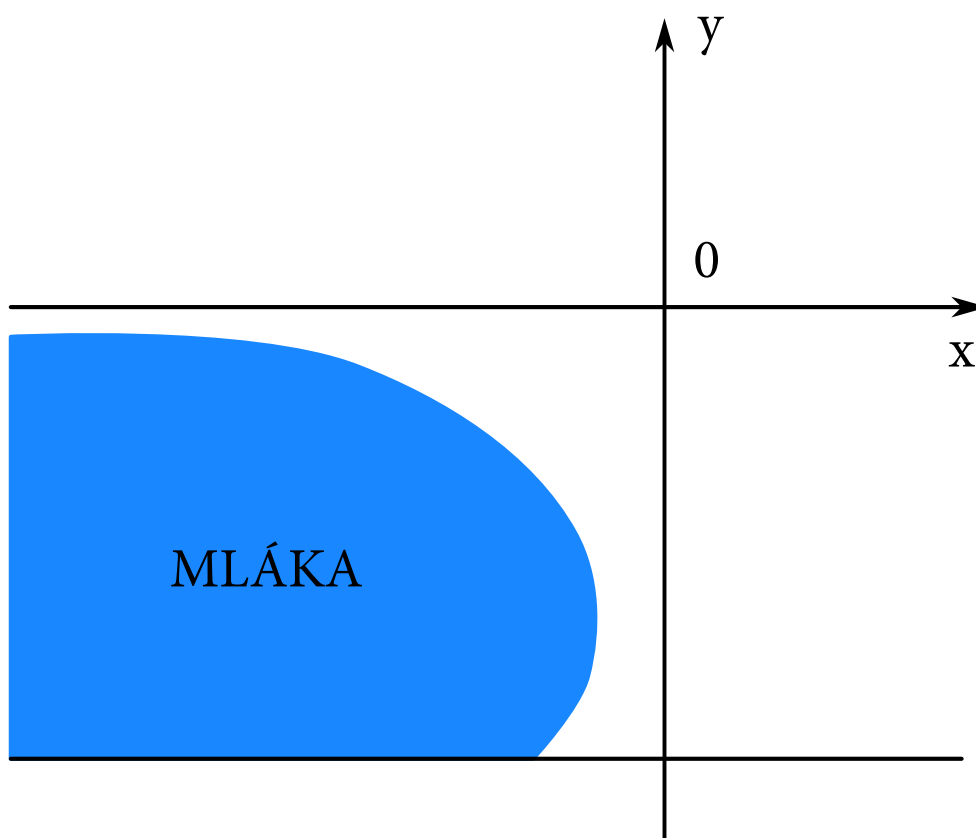
Táto časť určite ide spočítať zosumovaním nekonečnej rady. Ale tu je ten trik veľmi priamočiary a všetky riešenia ho obsahovali hneď na prvý pokus: spočítame si čas, ktorý autám potrvá, kým sa stretnú $t = \Delta x / (v_1 + v_2)$, potom dráha, ktorú za ten čas kondor nalieta bude jednoducho $s = v_3 t = \Delta x v_3 / (v_1 + v_2)$. Zostáva všetko podosádzať a dostaneme

$$s = \Delta x \frac{v_3}{v_1 + v_2} = 2h_s \tan \beta_0 \frac{v_3}{v_1 + v_2} = \frac{2}{k} \tan \left(\frac{1}{250f} \ln \left(\frac{mg}{F} \right) \right) \frac{v_3}{v_1 + v_2}.$$

2.3 Mláková

vzorák Janči, opravoval Janči (jan.pulmann@gmail.com)

Nech x a y sú súradnice ako na obrázku. Popíšme profil mláky, najprv ako funkciu $y(x)$. Táto funkcia môže byť viacznačná, preto neskôr prejdeme ku rovnici pre $x(y)$.

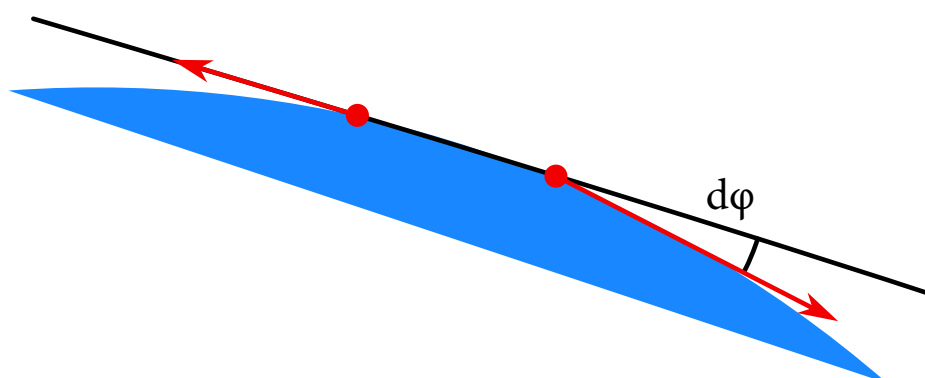


Obrázok 2.3.1: Voľba súradníc

Hydrostatický tlak je $-\rho g y$, a teda normálová sila na malý kus hladiny (na 1 meter v smere kolmom na obrázok) je

$$-\rho g y dl = -\rho g y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Táto sila sa musí vyrovnáť s vektorovým súčtom síl povrchového napätia. Povrchové napätie ťahá každý element hladiny pozdĺž jeho hranice, s veľkosťou úmernou dĺžke hranice skrz konštantu σ .



Obrázok 2.3.2: Vektorový súčet síl

Ak dve sily veľkosti σ zvierajú uhol $d\phi$ ako na obrázku, ich súčet má veľkosť $\sigma d\phi$ a ukazuje kolmo dnu do mláky. Rovnica rovnováhy je teda

$$-\rho g y \sqrt{1 + (y')^2} dx \stackrel{!}{=} \sigma d\phi = |\sigma d \arctan y'| = \sigma \frac{y'' \operatorname{sgn}(y'')}{1 + (y')^2} dx,$$

kde sme upravili pravú stranu. Znamienko $\operatorname{sgn} y''$ pochádza z toho, že sila dnu od povrchového napätia je kladná pre konkávny aj konvexný povrch (nad a pod previsom mláky). Rovnicu rovnováhy teda môžeme upravovať nasledovne

$$\begin{aligned} \rho g y \sqrt{1 + (y')^2} &= \sigma \frac{y'' \operatorname{sgn}(y'')}{1 + (y')^2} \\ \frac{\rho g}{\sigma} y &= \frac{y'' \operatorname{sgn}(y'')}{(1 + (y')^2)^{3/2}}; \quad \text{vynásobne rovnicu } y' \\ \frac{\rho g}{\sigma} y y' &= \frac{y' y'' \operatorname{sgn}(y'')}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \\ \frac{\rho g}{2\sigma} (y^2)' &= \operatorname{sgn}(y'') ((1 + (y')^2)^{-1/2})'. \end{aligned}$$

Dostávame

$$\frac{\rho g}{2\sigma} y^2 = C + \operatorname{sgn}(y'') (1 + (y')^2)^{-1/2}.$$

Konštantu C určíme nasledovne. Pozrieme sa na vrch mláky, teda sme v prípade konkávneho povrchu kde $\operatorname{sgn}(y'') = -1$. Keďže ďaleko od okraja je povrch mláky vodorovný na polohe $y = 0$, chceme aby (pre $x \rightarrow -\infty$) naše riešenie spĺňalo $y \rightarrow 0$ aj $y' \rightarrow 0$. To je možné len pre $C = 1$. Zbavme sa tiež faktoru $\frac{\rho g}{2\sigma}$, ktorý má rozmer m^{-2} : prejdime ku bezrozmerným súradniciam $\tilde{y} = \sqrt{\frac{\rho g}{2\sigma}} y$ a $\tilde{x} = \sqrt{\frac{\rho g}{2\sigma}} x$. Dosadíme a vyjadríme najprv $\tilde{y}' = d\tilde{y}/d\tilde{x} = dy/dx$ (znamienko $\operatorname{sgn}(y'')$ vypadne vďaka druhej mocnine)

$$\left| \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \right| = \frac{\sqrt{1 - (1 - \tilde{y}^2)^2}}{|1 - \tilde{y}^2|}.$$

Prejdime teraz ku závislosti $\tilde{x}(\tilde{y})$, aby sme vyjadrovali jednoznačnú funkciu:

$$\left| \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} \right| = \frac{|1 - \tilde{y}^2|}{|\tilde{y}| \sqrt{2 - \tilde{y}^2}}.$$

Zbavme sa ešte absolútnych hodnôt. V našich súradniciach je $\tilde{y} < 0$. Pohľadom na obrázok určíme, že profil mláky ako funkcia $\tilde{x}(\tilde{y})$ má deriváciu ktorá mení znamienko, všetky absolútne hodnoty preto môžeme vymeniť za jedno znamienko².

²Inak povedané, vylúčili sme prípad, že v rovnicu 2.3.1 treba brať s rôznymi znamienkami v sektoroch $\tilde{y} \lesssim -1$, kde dáva zmysel. Bod $\tilde{y} = -1$ je práve ten, kde je povrch mláky zvislý. Celkové znamienko nám len hovorí, či mláka ide doprava alebo doľava, zvolili sme ho tak, aby sedelo s obrázkom.

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{y}} = \frac{1 - \tilde{y}^2}{\tilde{y}\sqrt{2 - \tilde{y}^2}}. \quad (2.3.1)$$

Tento integrál sa dá spočítať elementárne substitúciou $t^2 = 2 - \tilde{y}^2$, dostávame

$$\tilde{x} = \int \frac{1 - \tilde{y}^2}{\tilde{y}\sqrt{2 - \tilde{y}^2}} d\tilde{y} = \int \frac{1 - t^2}{2 - t^2} dt = \int dt - \frac{1}{2 - t^2} dt.$$

Prvý člen sa zintegruje na t , druhý člen pomocou rozkladu na parciálne zlomky (použijúc $0 < t < \sqrt{2}$)

$$\int \frac{1}{2 - t^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{2} - t} + \frac{dt}{\sqrt{2} + t} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t}.$$

Po spätnom dosadení dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \sqrt{2} \left[\sqrt{1 - \tilde{y}^2/2} + \frac{1}{4} \log \frac{1 - \sqrt{1 - \tilde{y}^2/2}}{1 + \sqrt{1 - \tilde{y}^2/2}} \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\sqrt{1 - \tilde{y}^2/2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - \tilde{y}^2/2} \right] \end{aligned}$$

Analýza riešenia

Spomeňme si najprv, že premenné s vlnkou sú merané v jednotkách $\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}$ čo pre vodu pri 25 stupňoch predstavuje približne 3,8 mm. Z tvaru riešenia môžeme urobiť nasledovné pozorovania:

- Z rovnice 2.3.1 vidíme, že derivácia $\tilde{x}$ je nulová pre $\tilde{y} = 1$, teda v tomto bode je kraj mláky zvislý. V tomto bode je

$$\tilde{x}(-1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.38$$

- Maximálna hĺbka mláky je $\tilde{y} = -\sqrt{2}$, keďže pre túto hodnotu pravá strana rovnice 2.3.1 diverguje. Hodnota $\tilde{x}(-\sqrt{2})$ je 0; maximálny previs mláky je teda hore spočítaná hodnota $\tilde{x}(-1)$. Vo všeobecnosti, previs je rovný $\tilde{x}(-1) - \tilde{x}(-\tilde{h})$, kde (kladné) $\tilde{h}$ je bezrozmerná hĺbka mláky medzi 1 a $\sqrt{2}$.
- Pre $\tilde{y}$ malé sa riešenie 2.3.2 zjednoduší na

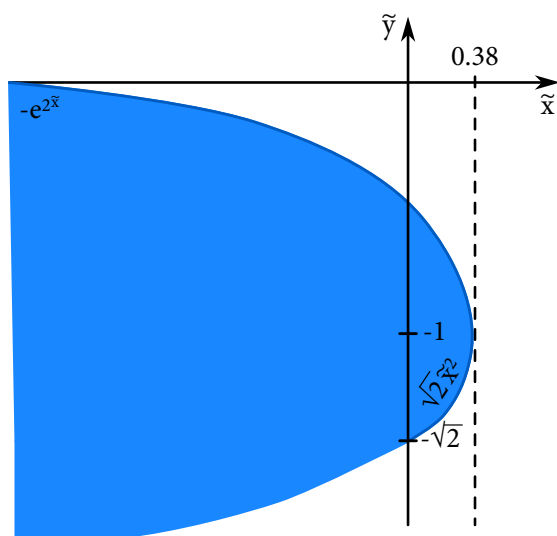
$$\tilde{x} = \sqrt{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \log(-\tilde{y}) \quad \text{alebo} \quad \tilde{y} = -D \exp(2x),$$

teda mláka sa ku rovnému povrchu blíži ako exponenciála.

- Na druhej strane, pre mláku maximálnej hĺbky zvolme parameter $\tilde{y} = -\sqrt{2} + \tilde{\epsilon}$. Potom blízko spodku mláky platí $\tilde{x} = 2^{-1/4} \sqrt{\tilde{\epsilon}}$, alebo

$$\tilde{y} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\tilde{x}^2,$$

teda mláka v tomto prípade pri dne vyzerá ako spodok paraboly. Všetky tieto informácie sú v grafe

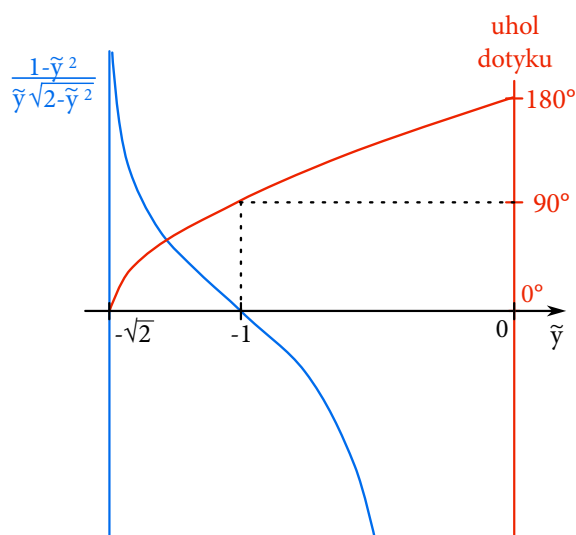


Obrázok 2.3.3: Profil mláky s asymptotickým správaním a význačnými bodmi.

- Mláku, ktorá zvierá konkrétny uhol α_{dotyk} s podlahou nájdeme tak, že zvolíme riešenie ktoré končí v hĺbke menšej než $\tilde{y} = -\sqrt{2}$. Kotangens uhla v hĺbke $\tilde{h} = -\tilde{y}$ je daný rovnicou 2.3.1, teda medzi hĺbkou $\tilde{h}$ a uhlom je vzťah

$$\alpha_{\text{dotyk}} = \operatorname{arccot} \frac{\tilde{h}^2 - 1}{\tilde{h}\sqrt{2 - \tilde{h}^2}}$$

Pre $\tilde{h} \rightarrow \sqrt{2}$ je uhol 0° , pre $\tilde{h} = 1$ je uhol 90° a pre $\tilde{h} \rightarrow 0$ je uhol 180° . Pravá strana rovnice 2.3.1 a uhol α_{dotyk} sú vynesené v grafe:



Obrázok 2.3.4: Derivácia $\tilde{x}$ a uhol v závislosti od hĺbky.