

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Pingpong medzi dvoma mlynskými kameňmi (jakocak@gmail.com)

vzorák Jakub, opravoval Jakub

Táto úloha má veľa rôznych spôsobov riešenia, od trikového riešenia s použitím jednoduchých vzťahov, cez riešenie použitím diferenciálnych rovníc až po riešenie cez mocnenie matíc. Poďme sa na jednotlivé riešenia pozrieť.

Geometrické riešenie

Najprv sa musíme pozrieť na to, čo nastane pri dokonalej zrážke dvoch telies v jednom rozmere¹. Predpokladajme, že máme dve telesá s hmotnosťami m_A a m_B a rýchlosťami v_A a v_B . Pri dokonalej zrážke sa zachováva celková hybnosť a celková kinetická energia. To sa dá zapísať do rovníc ako

$$m_A v_A + m_B v_B = \text{konšt.},$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \text{konšt.}.$$

Klasický postup je napísať celkovú hybnosť telies a kinetickú energiu telies pred a po zrážke, čím dostaneme dve rovnice o dvoch neznámych, ktoré vyriešime. Avšak, táto sústava rovníc sa dá interpretovať aj čisto geometricky.

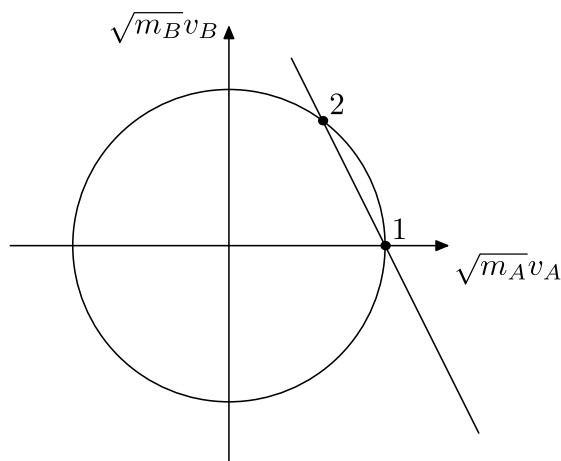
Zatiaľ čo hmotnosti m_A a m_B sú konštanty, tak rýchlosti telies v_A a v_B sú stavové veličiny a môžu sa meniť. Ak budeme uvažovať o priestore stavov, ktorý bude popisovať všetky možné stavy systému, tak dostaneme dvojrozmernú rovinu popísanú súradnicami v_A a v_B . Rovnica zákona zachovania hybnosti je v tomto priestore lineárna rovnica a všetky stavy s rovnakou hybnosťou bude spájať priamka. Rovnica zákona zachovania kinetickej energie je zase kvadratická forma a všetky stavy s rovnakou energiou bude spájať vo všeobecnosti elipsa. Ak si však šikovne preškálujeme premenné v_A a v_B na premenné $\sqrt{m_A} v_A$ a $\sqrt{m_B} v_B$, tak vieme elipsu zmeniť na kruh. Použijeme pritom túto zmenu

$$\sqrt{m_A}(\sqrt{m_A} v_A) + \sqrt{m_B}(\sqrt{m_B} v_B) = \text{konšt.},$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{m_A} v_A)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{m_B} v_B)^2 = \text{konšt.}.$$

Potom zákon zachovania kinetickej energie vytvára kruh a zákon zachovania hybnosti tvorí priamku so sklonom $-\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}$. Ilustrujeme to na príklade: Prepokladajme, že teleso s veľkou hmotnosťou m_A má rýchlosť v_A a teleso s menšou hmotnosťou m_B má nulovú rýchlosť $v_B = 0$ (stav 1). Keď si situáciu zobrazíme v súradniciach $\sqrt{m_A} v_A$ a $\sqrt{m_B} v_B$, tak existuje iba jeden druhý stav, ktorý spĺňa obe rovnice – stav 2 (obrázok 1.1.1). Po zrážke sa teda obe telesá budú pohybovať v kladnom smere.

¹Zrážky telies vo viacerých rozmeroch sú v skutočnosti tiež iba zrážky v jednom smere. Viac detailov [tu](https://fx.fks.sk/).



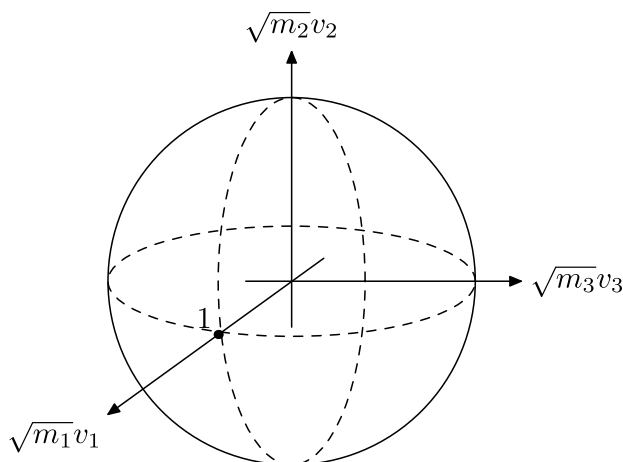
Obrázok 1.1.1: Zákon zachovania energie (kružnica) a zákon zachovania hybnosti (priamka) v priestore súradníc $\sqrt{m_A}v_A$ a $\sqrt{m_B}v_B$.

Tento geometrický popis nám pomôže pri riešení našej úlohy. V našom prípade máme tri telesá s hmotnosťami m_1 , m_2 a m_3 a vieme, že v každom momente bude platiť zákon zachovania energie

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 = \text{konšt.}$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{m_1}v_1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{m_2}v_2)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{m_3}v_3)^2 = \text{konšt.}$$

Preto sa budeme v priestore súradníc $\sqrt{m_1}v_1$, $\sqrt{m_2}v_2$ a $\sqrt{m_3}v_3$ pohybovať po povrchu gule určenej počiatkovou energiou $\frac{1}{2}m_1v^2$ (obrázok 1.1.2).



Obrázok 1.1.2: Zákon zachovania energie (gula) pre tri telesá v priestore súradníc $\sqrt{m_1}v_1$, $\sqrt{m_2}v_2$ a $\sqrt{m_3}v_3$ s vyznačeným počiatkovým stavom.

Keďže sú telesá v poradí 1, 2 a 3, tak budú nastávať iba 2 druhy zrážok: zrážka telesa 1 a 2 a zrážka telesa 2 a 3. Pri každej z nich sa bude zachovávať zákon zachovania hybnosti. Keď sa zrazí teleso 1 a 2, tak sa rýchlosť telesa 3 nemení. Môžeme písať

$$\sqrt{m_1}(\sqrt{m_1}v_1) + \sqrt{m_2}(\sqrt{m_2}v_2) = \text{konšt.}.$$

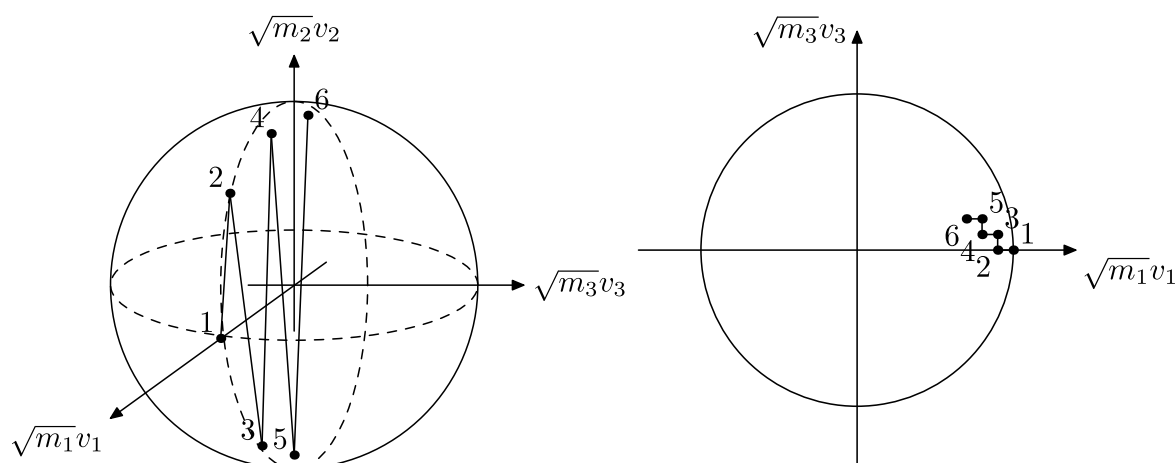
Musíme teda ostať iba v rovine stavov v súradniciach $\sqrt{m_1}v_1$ a $\sqrt{m_2}v_2$ a budeme sa pohybovať po priamke so sklonom $-\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$. Keďže platí $m_2 \ll m_1$, tak tento sklon bude veľmi strmý.

Podobne, pri zrážke telesa 2 a 3 sa rýchlosť telesa 1 nemení a ostávame v rovine stavov v súradniciach $\sqrt{m_2}v_2$ a $\sqrt{m_3}v_3$. Zo zákona zachovania hybnosti dostaneme

$$\sqrt{m_2}(\sqrt{m_2}v_2) + \sqrt{m_3}(\sqrt{m_3}v_3) = \text{konšt.},$$

a preto sa budeme pohybovať po priamke so sklonom $-\sqrt{\frac{m_3}{m_2}}$. Keďže platí $m_2 \ll m_3$, tak aj tento sklon bude strmý.

Ak si teda kvalitatívne zakreslíme, čo sa bude diať, tak stavy budú cik-cakovito prechádzať po povrchu gule a malé teleso 2 bude pendlovať medzi telesami 1 a 2. Bude postupne na striedačku obom odovzdávať hybnosť (obrázok 1.1.3).



Obrázok 1.1.3: Pohyb priestorom súradníc $\sqrt{m_1}v_1$, $\sqrt{m_2}v_2$ a $\sqrt{m_3}v_3$ pri zrážkach troch telies (vľavo celý priestor, vpravo projekcia do $\sqrt{m_1}v_1$ a $\sqrt{m_3}v_3$).

Po tomto kvalitatívnom pochopení geometrie stavov prejdeme ku kvantitatívnemu vyčísleniu. Označíme si súradnice ako $x_1 = \sqrt{m_1}v_1$, $x_2 = \sqrt{m_2}v_2$ a $x_3 = \sqrt{m_3}v_3$. Keďže platí $m_2 \ll m_1$ a $m_2 \ll m_3$, tak priamky zachovania hybnosti sú veľmi strmé (skoro rovnobežné so smerom osi x_2). Preto, keď sa na pohyb stavov pozrieme v projekcii do súradníc x_1 a x_3 , tak sa tieto 2 súradnice budú meniť iba o malé hodnoty δx_1 a δx_3 . Ak teda budeme v stave $(x_1, -|x_2|, x_3)$, tak prejdeme do stavu $(x_1 - |\delta x_1|, +|x_2|, x_3)$. Z geometrie priamky so sklonom $-\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ dostaneme

$$\delta x_1 = -2x_2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

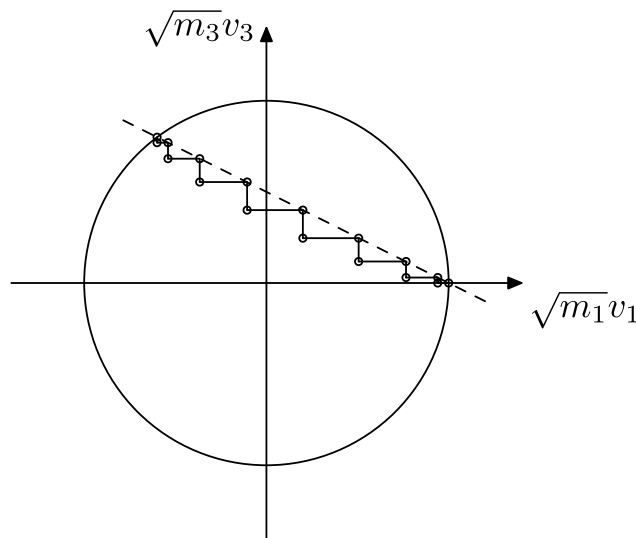
Podobne, keď budeme v stave $(x_1, +|x_2|, x_3)$, tak prejdeme do stavu $(x_1, -|x_2|, x_3 + |\delta x_3|)$ a z geometrie dostaneme

$$\delta x_3 = 2x_2 \sqrt{\frac{m_2}{m_3}}.$$

Vidíme, že teda zmeny v smere osi x_1 sú priamo úmerné zmenám v smere osi x_3 . To znamená, že stavy budú cik-cakovito smerovať pozdĺž priamky, ktorá má sklon

$$\frac{\delta x_3}{\delta x_1} = -\sqrt{\frac{m_1}{m_3}}.$$

Táto priamka zodpovedá práve situácii, ako keby platil zákon zachovania hybnosti pri zrážke telies 1 a 3, aj keď sa tieto telesá ani raz nezrazia.



Obrázok 1.1.4: Pohyb priestorom súradníc $\sqrt{m_1}v_1$ a $\sqrt{m_3}v_3$ pri zrážkach troch telies sa správa ako zrážka dvoch telies.

Ak teda vyriešime klasickým postupom zrážku telies 1 a 3, tak dostaneme ich konečné rýchlosti.

$$m_1 v + m_3 0 = m_1 v'_1 + m_3 v'_3,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_3 0^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_3 v'^2_3.$$

Vyriešením sústavy rovníc dostaneme

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} v,$$

$$v'_3 = \frac{2m_1}{m_1 + m_3} v.$$

Aby sme zistili počet zrážok, tak musíme zistiť, z koľkých úsekov sa skladá cik-cakovitá trasa stavov. Prierez pozdĺž čiarkovanej čiary v obrázku 1.1.4 vyberie z gule kruh. Tento kruh má polomer

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{m_3 v_3'^2 + m_1 (v - v_1')^2} = v \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}}.$$

Pri dvoch zrážkach, sa posunieme pozdĺž tohto kruhu v rovine x_1 - x_3 o malú vzdialenosť

$$\delta x = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_3^2} = 2x_2 \sqrt{\frac{m_2(m_1 + m_3)}{m_1 m_3}}.$$

Ak túto dĺžku preniesieme na obvod kruhu, tak dostaneme posun

$$\delta l = \delta x \frac{R}{x_2} = 2v \sqrt{m_2}.$$

To znamená, že po každých 2 zrážkach sa posunieme pozdĺž kruhu o rovnakú vzdialenosť δl . Keď teda prejdeme úplne horný polkruh, tak sme prešli cez všetky zrážky. Pre počet zrážok tak dostaneme

$$N \approx 2 \frac{\pi R}{\delta l} = \pi \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_2(m_1 + m_3)}}.$$

Počet zrážok nezávisí od počiatočnej rýchlosti. Viac o podobnej úlohe nájdete [tu](#) a [tu](#).

Riešenie cez diferencie

Za toto riešenie ďakujeme Richardovi Dudekovi.

Na otázku, aký bude konečný stav rýchlostí telies 1 a 3 vieme odpovedať jednoducho. Na konci musí byť rýchlosť telesa 2 nanajvýš rovná rýchlosti telesa 1 alebo telesa 3: Inak by teleso 2 ich dobehlo a nastala ďalšia zrážka, čo je spor s predpokladom, že máme konečný stav. Keďže má teleso 2 omnoho menšiu hmotnosť, tak môžeme jeho energiu a hybnosť zanedbať v porovnaní s ostatnými telesami.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 \approx m_1 v_1 + m_3 v_3 = \text{konšt.},$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \approx \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \text{konšt.}.$$

Tým pádom sa problém zredukuje na dokonalú zrážku medzi telesom 1 a 3 a konečné rýchlosti sú

$$v_1' = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} v,$$

$$v_3' = \frac{2m_1}{m_1 + m_3} v.$$

Na otázku, koľko prebehlo zrážok, musíme lepšie popísať, čo sa deje s rýchlosťami telies po každej zrážke. Zrážky budú prebiehať vždy v páre 1-2 a 2-3 na striedačku. Použitím riešenia dokonalej zrážky si napíšeme, ako sa vyvíjajú rýchlosti telies.

Najprv majú telesá rýchlosti v_1 , v_2 a v_3 . Po prvej zrážke medzi telesami 1 a 2 dostaneme nasledujúce rýchlosti v'_1 , v'_2 a v'_3

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2,$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2,$$

$$v'_3 = v_3.$$

Vieme však využiť, že $p_1 = m_2/m_1$ je malé číslo. Ak teda použijeme aproximáciu do prvého rádu (iba lineárne členy v parametri p_1), tak sa rovnice zjednodušia na tvar

$$v'_1 = (1 - 2p_1)v_1 + 2p_1v_2,$$

$$v'_2 = (2 - 2p_1)v_1 + (-1 + 2p_1)v_2,$$

$$v'_3 = v_3.$$

Po druhej zrážke medzi telesami 2 a 3 dostaneme rýchlosti v''_1 , v''_2 a v''_3

$$v''_1 = v'_1,$$

$$v''_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v'_2 + \frac{2m_3}{m_2 + m_3} v'_3,$$

$$v''_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v'_2 + \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} v'_3.$$

Znova vieme využiť, že $p_3 = m_2/m_3$ je malé číslo a použijeme aproximáciu do prvého rádu (iba lineárne členy v parametri p_3). Dostaneme

$$v''_1 = v'_1,$$

$$v''_2 = (-1 + 2p_3)v'_2 + (2 - 2p_3)v'_3,$$

$$v''_3 = 2p_3v'_2 + (1 - 2p_3)v'_3.$$

Keď tieto dosadíme pôvodné rýchlosti a zanecháme iba lineárne členy v parametroch p_1 a p_3 , tak dostaneme

$$v''_1 = (1 - 2p_1)v_1 + 2p_1v_2,$$

$$v''_2 = (-2 + 2p_1 + 4p_3)v_1 + (1 - 2p_1 - 2p_3)v_2 + (2 - 2p_3)v_3,$$

$$v''_3 = 4p_3v_1 + (-2p_3)v_2 + (1 - 2p_3)v_3.$$

Vieme to napísať aj vo forme matice ako

$$\begin{pmatrix} v''_1 \\ v''_2 \\ v''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2p_1 & 2p_1 & 0 \\ -2 + 2p_1 + 4p_3 & 1 - 2p_1 - 2p_3 & 2 - 2p_3 \\ 4p_3 & -2p_3 & 1 - 2p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Pokračovanie cez diferenciálne rovnice

Jeden zo spôsobov, ako vyriešiť túto maticovú rovnicu, je nasledujúci. Ak sa lepšie pozrieme na rovnice, tak si všimneme, že je vhodné si definovať dve nové premenné $u_2 := v_1 - v_2$ a $u_3 := v_1 - v_3$. Prepísaním do premenných v_1 , u_2 a u_3 dostaneme pre zmenu týchto parametrov rovnicu

$$\begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2p_1 & 0 \\ 0 & -4p_1 - 2p_3 & 2 - 2p_3 \\ 0 & -2p_1 - 2p_3 & -2p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Tieto zmeny sú veľmi malé, takže môžeme o nich uvažovať ako o malých diferenciálnych zmenách, ktoré nastali za jeden cyklus. Tieto cykly budeme rátať pomocou premennej n a platí $\Delta n = 1$ pre jeden cyklus. Môžeme teda napísať diferenciálne rovnice

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta n} \approx \frac{dv_1}{dn} = -2p_1 u_2,$$

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta n} \approx \frac{du_2}{dn} = (-4p_1 - 2p_3)u_2 + (2 - 2p_3)u_3, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\Delta u_3}{\Delta n} \approx \frac{du_3}{dn} = (-2p_1 - 2p_3)u_2 + (-2p_3)u_3, \quad (1.1.3)$$

vhodnou lineárnou kombináciou vždy vieme previesť 2 lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu na 1 lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu. Ak urobíme deriváciu rovnice 1.1.2 a pridáme ku nej lineárnu kombináciu rovníc 1.1.2 a 1.1.3, tak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{dn^2} &= (-4p_1 - 2p_3) \frac{du_2}{dn} + (2 - 2p_3) \frac{du_3}{dn} + \\ &+ a \left[(-4p_1 - 2p_3)u_2 + (2 - 2p_3)u_3 - \frac{du_2}{dn} \right] + \\ &+ b \left[(-2p_1 - 2p_3)u_2 + (-2p_3)u_3 - \frac{du_3}{dn} \right] \\ \frac{d^2 u_2}{dn^2} &= [a(-4p_1 - 2p_3) + b(-2p_1 - 2p_3)]u_2 + \\ &+ [a(2 - 2p_3) + b(-2p_3)]u_3 + \\ &+ (-4p_1 - 2p_3 - a) \frac{du_2}{dn} + (2 - 2p_3 - b) \frac{du_3}{dn} \end{aligned}$$

Ak zvolíme $a = 2p_3$ a $b = 2 - 2p_3$, tak členy n_3 a $\frac{du_3}{dn}$ vypadnú a dostaneme rovnicu iba pre u_2 (ak necháme iba členy do 1. rádu)

$$\frac{d^2 u_2}{dn^2} + (4p_1 + 4p_3) \frac{du_2}{dn} + (4p_1 + 4p_3)u_2 = 0.$$

Ide o rovnicu tlmeného harmonického oscilátora

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

pre parametre $\omega_0 = 2\sqrt{p_1 + p_3}$ a $\zeta = \sqrt{p_1 + p_3}$. Nás zaujíma, ako vyzerá riešenie pre počiatočné podmienky $v_1 = v$, $u_2 = v$ a $u_3 = v$. Takisto, zrážky medzi telesami prestanú v momente, keď u_2 bude prvýkrát záporné, keďže vtedy teleso 2 už nedobehne teleso 1 a nastala posledná zrážka. Keďže ζ je malé číslo, tak pôjde o kmitanie veľmi málo tlmené. Veličina u_2 bude negatívne niekedy počas prvej periódy, preto môžeme tlmenie zanedbať a pracovať s obyčajným oscilátorom

$$\frac{d^2 u_2}{dn^2} + (4p_1 + 4p_3)u_2 = 0.$$

Aby sme zistili v akom momente kmitania začíname, tak si vypočítame potenciálnu a kinetickú energiu na začiatku

$$u_2(n=0) = v$$

$$\frac{du_2}{dn}(n=0) = v(2 - 4p_1 - 4p_3) \approx 2v$$

$$E_{\text{pot}}(n=0) = \frac{1}{2}\omega_0^2 u_2^2 = 2(p_1 + p_3)v^2$$

$$E_{\text{kin}}(n=0) = \frac{1}{2}\left(\frac{du_2}{dn}\right)^2 = 2v^2$$

Vidíme, že kinetická energia je omnoho väčšia ako potenciálna energia, takže prakticky celá energia je v kinetickej forme. Dodatočne vieme, že rýchlosť je kladná. To zodpovedá prípadu, že začíname v rovnovážnej polohe $u_2 \approx 0$ s kladnou rýchlosťou. Preto riešenie sa dá napísať približne ako sínusoida

$$u_2(n) \approx \frac{v}{\sqrt{p_1 + p_3}} \sin(2\sqrt{p_1 + p_3}n),$$

kde amplitúdu sme určili z energie počiatočného stavu. Sínus bude negatívny v polovici periódy, takže dostaneme

$$n_{\text{koniec}} = \frac{\pi}{2\sqrt{p_1 + p_3}}.$$

Ešte nesmieme zabudnúť, že pri jednom cykle nastanú 2 zrážky, takže nakoniec pre počet zrážok N dostaneme vzťah

$$N = 2n_{\text{koniec}} = \frac{\pi}{\sqrt{p_1 + p_3}} = \pi \sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_2(m_1 + m_3)}},$$

čo je v zhode s výsledok z geometrického riešenia. Keď dosadíme funkciu $u_2(n)$ do rovníc pre v_1 a u_3 , tak dostaneme vzťahy aj pre funkcie $v_1(n)$ a $u_3(n)$

$$v_1(n) = \frac{vp_3}{p_1 + p_3} + \frac{vp_1}{p_1 + p_3} \cos(2\sqrt{p_1 + p_3}n),$$

$$u_3(n) = v \cos(2\sqrt{p_1 + p_3}n).$$

Odtiaľ už vieme dedukovať pôvodné rýchlosti v_1 , v_2 a v_3

$$v_1(n) = \frac{vp_3}{p_1 + p_3} + \frac{vp_1}{p_1 + p_3} \cos(2\sqrt{p_1 + p_3}n),$$

$$v_2(n) = \frac{vp_3}{p_1 + p_3} + \frac{vp_1}{p_1 + p_3} \cos(2\sqrt{p_1 + p_3}n) - \frac{v}{\sqrt{p_1 + p_3}} \sin(2\sqrt{p_1 + p_3}n),$$

$$v_3(n) = \frac{vp_3}{p_1 + p_3} - \frac{vp_1}{p_1 + p_3} \cos(2\sqrt{p_1 + p_3}n).$$

Po dosadení $n = n_{\text{koniec}}$ dostaneme

$$v_1(n_{\text{koniec}}) = \frac{v(p_3 - p_1)}{p_1 + p_3} = \frac{v(m_1 - m_3)}{m_1 + m_3},$$

$$v_2(n_{\text{koniec}}) = \frac{v(p_3 - p_1)}{p_1 + p_3} = \frac{v(m_1 - m_3)}{m_1 + m_3},$$

$$v_3(n_{\text{koniec}}) = \frac{2vp_3}{p_1 + p_3} = \frac{2vm_1}{m_1 + m_3}.$$

Týmto sme overili, že rýchlosti telies 1 a 3 sú správne. Rýchlosť telesa 2 vyzerá po všetkých zrážkach rovnako ako rýchlosť v_1 . To je kvôli tomu, že v našej konštrukcii sme uvažovali párny počet zrážok. Ak by sme uvažovali nepárny počet zrážok, tak by rýchlosť telesa 2 na konci zrážok bola v_3 a teleso 2 by išlo za telesom 3 rovnakou rýchlosťou.

Pokračovanie cez mocniny matice

Maticová rovnica 1.1.1 sa dá riešiť aj inak. Ak chceme dostať stav rýchlostí po 2 zrážkach, stačí vynásobiť vektor rýchlosti touto maticou. Takže po n cykloch budú rýchlosti telies dané rovnicou

$$\begin{pmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2p_1 & 2p_1 & 0 \\ -2 + 2p_1 + 4p_3 & 1 - 2p_1 - 2p_3 & 2 - 2p_3 \\ 4p_3 & -2p_3 & 1 - 2p_3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \end{pmatrix}.$$

Umocniť maticu je vo všeobecnosti náročné. Existuje na to zaužívaný postup. Ak by sa nám podarilo maticu previesť na diagonálny tvar, tak umocniť maticu je ľahké.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$$

Ak vieme urobiť rozklad matice na nasledujúci súčin

$$A = U \cdot D \cdot U^{-1},$$

kde U je unitárna matica a D je diagonálna matica, tak umocnenie sa dá vypočítať ako

$$A^n = (U \cdot D \cdot U^{-1})^n = U \cdot D \cdot U^{-1} U \cdot D \cdot U^{-1} \dots U \cdot D \cdot U^{-1} = U \cdot D^n \cdot U^{-1}.$$

Ak urobíme takýto rozklad pre našu maticu², tak dostaneme

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{p_1(p_1 + \sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3})}{p_3(2p_1 + p_3 + \sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3})} & \frac{p_1(-p_1 + \sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3})}{p_3(2p_1 + p_3 - \sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3})} \\ 1 & \frac{(p_1 + p_3)(p_1 + p_3 - 1 + \sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3})}{p_3(2p_1 + p_3 + \sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3})} & \frac{(p_1 + p_3)(p_1 + p_3 - 1 - \sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3})}{p_3(2p_1 + p_3 - \sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3})} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3} - 2p_1 - 2p_3 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3} - 2p_1 - 2p_3 + 1 \end{pmatrix}$$

Vieme však, že p_1 a p_3 sú malé čísla a preto môžeme zanedbať členy vyšších rádov. Dostaneme teda

$$\sqrt{p_1^2 + p_1 p_3 + p_3^2 - p_1 - p_3} \approx i\sqrt{p_1 + p_3}.$$

A matice sa preto zjednodušia na tvar

$$U \approx \begin{pmatrix} 1 & -\frac{p_1}{p_3} & -\frac{p_1}{p_3} \\ 1 & \frac{p_1 + p_3}{p_3} & \frac{p_1 + p_3}{p_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2i\sqrt{p_1 + p_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2i\sqrt{p_1 + p_3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\sqrt{p_1 + p_3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{+2i\sqrt{p_1 + p_3}} \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} \approx \begin{pmatrix} \frac{p_3}{p_1 + p_3} & \frac{p_1 p_3}{p_1 + p_3} & \frac{p_1}{p_3} \\ -\frac{p_3}{2(p_1 + p_3)} & -\frac{2(p_1 + p_3)}{p_3} & \frac{2(p_1 + p_3)}{p_3} \\ -\frac{p_3}{2(p_1 + p_3)} & -\frac{2(p_1 + p_3)}{p_3} & \frac{2(p_1 + p_3)}{p_3} \end{pmatrix}.$$

Ak použijeme teda počiatočný stav $v_1(0) = v$, $v_2(0) = 0$ a $v_3(0) = 0$, tak dostaneme

$$\begin{pmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v p_3}{p_1 + p_3} + \frac{v p_1}{2(p_1 + p_3)} (e^{2i\sqrt{p_1 + p_3}n} + e^{-2i\sqrt{p_1 + p_3}n}) \\ \frac{v p_3}{p_1 + p_3} + \frac{v p_1}{2(p_1 + p_3)} (e^{2i\sqrt{p_1 + p_3}n} - e^{-2i\sqrt{p_1 + p_3}n}) \\ \frac{v p_3}{p_1 + p_3} - \frac{v p_1}{2(p_1 + p_3)} (e^{2i\sqrt{p_1 + p_3}n} + e^{-2i\sqrt{p_1 + p_3}n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v p_3}{p_1 + p_3} + \frac{v p_1}{p_1 + p_3} \cos(2\sqrt{p_1 + p_3}n) \\ \frac{v p_3}{p_1 + p_3} + \frac{v p_1}{p_1 + p_3} \cos(2\sqrt{p_1 + p_3}n) \\ \frac{v p_3}{p_1 + p_3} - \frac{v p_1}{p_1 + p_3} \cos(2\sqrt{p_1 + p_3}n) \end{pmatrix},$$

Touto metódou dostaneme rovnaké výsledky ako cez diferenciálne rovnice, ale rozklad všeobecnej 3×3 matice sa robí ručne náročne bez matematického softvéru. V skutočnosti je toto riešenie a riešenie cez diferenciálne rovnice úzko prepojené. Maticový zápis zodpovedá práve sústave lineárnych diferečných rovníc (tiež nazývané rekurenčné vzťahy). Lineárne diferenčné a lineárne diferenciálne rovnice majú rovnaký tvar riešenia. Ide vždy o exponenciály tvaru $e^{\lambda n}$, kde λ sú práve hodnoty z diagonálnej matice. Síce v riešení vidíme sínusy a kosínusy, to sú však len prezlečené exponenciály pre imaginárne hodnoty λ .

$$\sin(\lambda n) = \frac{1}{2i}(e^{+i\lambda n} - e^{-i\lambda n})$$

$$\cos(\lambda n) = \frac{1}{2}(e^{+i\lambda n} + e^{-i\lambda n})$$

²Priznám sa, že som musel použiť matematický softvér, keďže na ručné počítanie to už bolo náročnejšie.

Na záver môžeme povedať, že toto zadanie má veľa rôznych riešení, kde každé poskytuje iný pohľad na úlohu. Každé riešenie ponúka inú sadu nástrojov na riešenie úloh. Výskyt čísla π v riešení sa dá pochopiť v geometrickom obraze (obvod kruhu), ale aj z pohľadu riešenia diferenciálnej rovnice (dĺžka polovice cyklu funkcie sínus).

1.2 Neutríno na úteku

vzorák **Legó**, opravoval **Legó** (simon.pajger@trojsten.sk)

Hustota neutrónov

Podľa [Wikipédie](#) je priemerný polomer neutrónu $r = 0,8$ fm. Vystačíme si s rádovým odhadom. Čiže ak napríklad zoberieme, že objem pripadajúci na jeden neutrón je kocka so stranou $a = 2r$, tak potom hustota počtu neutrónov je

$$n = \frac{1}{V} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{8r^3} = 2,4 \cdot 10^{44} \text{ m}^{-3}.$$

Stredná voľná dráha

Voľná dráha je vzdialenosť od jednej zrážky po druhú. Nás zaujíma jej priemerná hodnota. Vždy keď neutríno prejde vzdialenosť dx , tak zinteraguje, pokiaľ je vo valci s výškou dx a podstavou σ stred nejakého neutrónu. Takýto valec má objem $dV = \sigma dx$ a teda pravdepodobnosť, že sa v tom objeme nachádza stred neutrónu je $dP = n dV = n\sigma dx$. Ak sa v ňom nachádza, tak dôjde k interakcii (a my sme dosiahli voľnú dráhu neutrónu x). Ak nie, neutríno pokračuje ďalej a proces sa opakuje. Dôležité je všimnúť si, že neutríno zinteraguje s rovnakou pravdepodobnosťou dP hocikedy počas dráhy, pretože tá nezávisí na už prejdenej vzdialenosti x . Keď sa pozrieme na [definíciu exponenciálneho rozdelenia](#), vidíme, že to tento proces tomu presne zodpovedá (konkrétne zodpovedá exponenciálnemu rozdeleniu s parametrom $\lambda = n\sigma$). Potom môžeme dosadiť do vzorca na strednú hodnotu exponenciálneho rozdelenia a máme strednú voľnú dráhu

$$l = \frac{1}{n\sigma} \approx 4 \text{ m}.$$

Doba úniku

Začneme simuláciou. Tento kód je písaný v Julii, čo je jazyk veľmi podobný Python-u, ale beží výrazne rýchlejšie. Preto je to podľa mňa ideálny programovací jazyk pre fyzikov.

using Statistics

$R = 10_000.0$

$R2 = R * R$

$l = 4$

$N = 300$

$ls = \text{zeros}(N)$

for i **in** $1:N$

$x, y, z = 0.0, 0.0, 0.0$

$l_sum = 0.0$

$counter = 0$

while $(x^2 + y^2 + z^2) < R2$

```

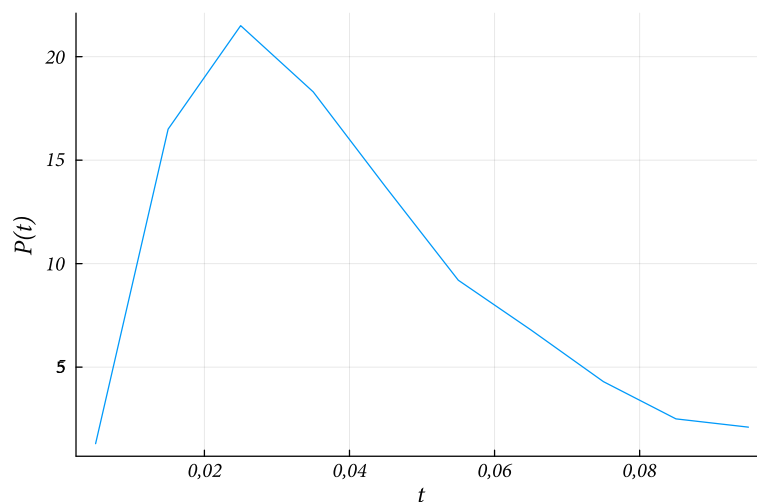
counter += 1
li = l * (-log(rand()))
l_sum += li
phi = 2 * pi * rand()
zi = 2 * rand() - 1
x += li * sqrt(1 - zi^2) * sin(phi)
y += li * sqrt(1 - zi^2) * cos(phi)
z += li * zi
end

ls[i] = l_sum
end

tR = mean(ls) / 3 / 1e8
Dtr = std(ls) / 3 / 1e8

```

Vysvetlime si, ako kód funguje. Najprv si nastavím nejaké konštanty ako polomer hviezdy R , stredná dráha l , alebo počet opakovaní N . No a potom teda N -krát zopakujem experiment: na začiatku nastavím súradnice na nuly (stred hviezdy). Potom skontrolujem, či neutríno uletelo z hviezdy (ak súčet štvorcov jeho súradníc je väčší ako štvorec polomeru). Teda budem robiť kroky dovtedy, kým taká situácia nenastane. Zostáva vysvetliť, ako spravím jeden krok. V predchádzajúcej sekcii sme si povedali, že vzdialenosť medzi dvoma nárazmi (dĺžka kroku) je z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou 4 metre. To môžem získať napríklad tak, že rozdelenie zintegrujem (získam kumulatívnu distribučnú funkciu, jej obor hodnôt je 0 až 1), potom už len tento vzťah invertujem. Vygenerujem (uniformne) číslo od 0 do 1 a nájdem jemu prislúchajúcu hodnotu náhodnej premennej. Zostáva náhodne určiť smer (čiže vygenerovať bod na povrchu jednotkovej gule). Na to je viacero možností, ja som vygeneroval náhodný uhol v rovine x - y a náhodné z uniformne od -1 po 1 . Že toto skutočne funguje, je trocha kontraintuitívne, ale je to tak. Priamočiarejšia možnosť by bola vygenerovať 3 čísla z Gaussovho rozdelenia so stredom v 0 a výsledný vektor správne prenормovať na veľkosť 1. Musím si ukladať jednotlivé prejdené dĺžky a keď neutríno vyletí, tak si tento súčet uloží (neriešim, že časť poslednej dráhy bude mimo hviezdu, lebo to budú metre, kým celková dráha budú minimálne kilometre). Nakoniec si z týchto dráh zrátam priemer a odchýlku a oboje vydelím rýchlosťou svetla, aby som dostal čas. Zo simulácie dostaneme priemerný čas $t_R = 0,04$ s a odchýlku $\sigma_t = 0,03$ s. Ešte som potom vykrelil distribúciu časov.



Obrázok 1.2.1: Hustota pravdepodobnosti času úniku.

Čo sa týka analytických odhadov: úplne rovnaké správanie majú tzv. častice, ktoré sa spomínajú napríklad v článku „[The statistical physics of active matter: From self-catalytic colloids to living cells](#)“ (arXiv verzia). Tieto (dôležité je uvedomiť si, že tu sa už nebudeme o subatomárnych časticách, ale napríklad o baktériách) sú jedným z príkladov takzvaných aktívnych častíc (v článku sa môžete dočítať aj o tých ďalších), čo sú častice, ktoré používajú energiu z prostredia na svoj mechanický pohyb. Nás zaujíma efektívna difúzna konštanta takýchto častíc, pre ktorú spomínaný článok udáva vzorec

$$D_{ac} = \mu_t v_0^2 \tau / d,$$

kde μ_t je akýsi prevrátený odpor prostredia. Ten je dôležitý pre baktérie, ale v prípade neutrína nehrá úlohu, čiže ho môžeme ignorovať (rozumej položiť rovný 1). Rýchlosť je prakticky rýchlosť svetla $v_0 = c$, čas $\tau = l/c$ je stredný čas medzi zmenami smeru a $d = 3$ je dimenzia. Čiže v našom prípade dostaneme $D_{ac} = cl/3$.

Potom pre dostatočne dlhú náhodnú prechádzku (čo my by sme fakt mali mať) je stredná kvadratická vzdialenosť od počiatku úmerná Dt , kde naše neutríno nerobí žiadnu pasívnu difúziu, čiže nám stačí zobrať $D = D_{ac}$ a dosadiť do vzťahu

$$\langle r^2(t) \rangle = 2dD_{ac}t = 2clt.$$

Odhad času, za ktorý by teda malo neutríno vyletieť z hviezdy, dostaneme jednoducho tak, že položíme $\langle r^2(t) \rangle = R^2$ a vyriešime pre t_R

$$t_R = \frac{R^2}{2cl} = 0,04 \text{ s}.$$

Tento analytický odhad sedí s výsledkom, čo sme získali numericky. Jediný problém s analytickým prístupom je, že som nezvládol vymyslieť, ako analyticky spočítať rozptyl tohto času a to je toto moja oblasť výskumu.³

1.3 Sir Thomson mal pravdu vzorák Jakub a Janči, opravoval Janči (jan.pulmann@gmail.com)

Pozrime sa najprv na samotnú kladne nabitú guľu. Z Gaussovho zákona dostávame, že elektrická intenzita vo vnútri je

$$E(r) = \frac{kQ \frac{r^3}{R^3}}{r^2} \Rightarrow E(r) = \frac{kQ}{R^3} r,$$

kde $Q = ne$ a $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Potenciál spočítame integráciou

$$U = -\frac{kQr^2}{2R^3} + C;$$

normalizáciu C zvolíme tak, aby sa $U(r)$ napojilo na potenciál $\frac{kQ}{r}$ v $r = R$. Táto normalizácia znamená, že v $r \rightarrow \infty$ je potenciál nula, čo potrebujeme na výpočty väzobných energií. Dostávame

$$-\frac{kQR^2}{2R^3} + C = \frac{kQ}{R}$$

teda

$$U(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & r \leq R, \\ \frac{kQ}{r} & r > R. \end{cases}$$

³Jediný odhad, ktorý som dostal, je pri použití ansatz-u, že hustota pravdepodobnosti sa správa ako $te^{-\alpha t}$. Tento ansatz je založený iba na vizuálnej podobnosti numerickej distribúcie. V takom prípade dostaneme, že platí $\frac{\alpha}{t_R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$. Tento odhad je v zhode s pozorovanými premennými, ale zvolený ansatz si vyžaduje odôvodnenie.

Celkovú potenciálnu energiu nabitej gule spočítame tak, že ju po vrstvách⁴ rozoberieme a každú vrstvu pošleme do nekonečna. Dostaneme

$$E_{\text{gula}} = \int_{r=0}^{r=R} \underbrace{\frac{kQ \frac{r^3}{R^3}}{r}}_{\text{potenciál od zvyšku gule s polomerom } r} \cdot \underbrace{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}}_{\text{hustota náboja}} \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{objem tenkej vrstvy, ktorú práve posúvame do } \infty}$$

$$= \frac{3kQ^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} \frac{kQ^2}{R}$$

Vodík: Najnižšia energia, teda základný stav, je pre elektrón v centre gule, kedy dostaneme

$$E^{\text{vodík}} = \frac{3}{5} \frac{ke^2}{R} - \frac{3}{2} \frac{ke^2}{R} = -\frac{9}{10} \frac{ke^2}{R}.$$

Viac elektrónov: Rozmyslíme si, aké môžu byť polohy nábojov $\mathbf{r}_i$ v rovnováhe. Ak vektorovo spočítame všetky sily pôsobiace na všetky záporné náboje, tak sa vzájomné odpudivé sily vykrátia, a dostaneme len súčet síl od kladne nabitej gule. Celková sila je teda priamo úmerná súčtu $\sum_i \mathbf{r}_i$. Keďže v rovnováhe je sila na každý náboj nulová, musí byť súčet polôh vektorov rovný nule

$$\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_N = 0. \quad (1.3.1)$$

Inak povedané, ťažisko elektrónov musí ležať v strede gule.

Napíšme teraz rovnicu na rovnováhu síl pre elektrón 1 (nakreslite si!):

$$\frac{kNe\mathbf{r}_1}{R^3} = \sum_{i=2,3,\dots} \frac{ke^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^3}$$

alebo

$$\frac{N\mathbf{r}_1}{R^3} = \sum_{i=2,\dots,N} \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_{1i}^3},$$

kde sme označili $\Delta_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Ak použijeme 1.3.1, vieme prepísať $N\mathbf{r}_1$ ako

$$N\mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \dots + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_N)$$

a prepísať rovnicu rovnováhy síl ako

$$\sum_{i=2,\dots,N} \Delta_{1i} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\Delta_{1i}^3} \right) = 0. \quad (1.3.2)$$

Podobná rovnica platí aj pre ostatné elektróny.

Hélium: Z podmienky 1.3.1 dostaneme, že v rovnováhe sú elektróny symetricky voči stredu gule. Z rovnice 1.3.2, kde je len jeden člen, zase dostaneme, že elektróny sú vzdialené na vzdialenosť R (každý vzdialený od

⁴ako cibuľu

jadra $R/2$). Celková energia hélia je teda

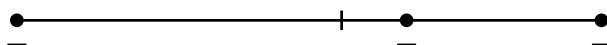
$$E^{\text{hélium}} = \underbrace{\frac{3}{5} \frac{k(2e)^2}{R}}_{\text{energia kladne nabitej gule}} - \underbrace{2 \frac{2ke^2}{2R} \left(3 - \frac{(R/2)^2}{R^2} \right)}_{\text{energia elektrónov voči guli}} + \underbrace{\frac{ke^2}{R}}_{\text{vzájomná energia elektrónov}} = -\frac{21}{10} \frac{ke^2}{R}. \quad (1.3.3)$$

Lítium: Rovnica 1.3.2 má dva členy

$$\Delta_{12} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right) + \Delta_{13} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\Delta_{13}^3} \right) = 0.$$

Rozoberieme teraz dve možnosti: buď ležia všetky tri elektróny na priamke, alebo nie (a tvoria teda trojuholník s ťažiskom v strede gule).

priamka: Predstavme si tri elektróny na priamke. Vieme, že súčet ich polôh je stred gule. Ak sú dva elektróny na jednej strane od stredu, tak kvôli rôznym vzdialenostiam tlačia odpudivé sily od krajných elektrónov stredný elektrón do stredu, kam ho aj ťahá príťažlivá sila nabitej gule.



Sily sú teda nulové len ak je stredný elektrón v strede gule, a z 1.3.1 teda ostatné dva elektróny symetricky okolo neho. Z rovnováhy síl dostaneme, že dva krajné elektróny sú vzdialené od stredu $r = \left(\frac{5}{12}\right)^{1/3} R$. Táto poloha však nie je stabilná. Ak vychýlime stredný elektrón o δ kolmo na elektrónovú priamku, tak sila von ktorá na neho pôsobí bude

$$\underbrace{2 \frac{ke^2}{r^2} \cdot \frac{\delta}{r}}_{\text{sila od elektrónov}} - \underbrace{\frac{3ke^2}{R^3} \delta}_{\text{sila od gule}} = \frac{ke^2 \delta}{R^3} \left(2 \cdot \frac{12}{5} - 3 \right).$$

Konštanta v zátvorke je kladná, a teda sila vytlačí stredný elektrón ďalej.

trojuholník: V tomto prípade sú vektory Δ_{12} a Δ_{13} lineárne nezávislé, a jediný spôsob, ako môže 1.3.2 platiť je, ak sú koeficienty pred oboma vektormi rovné nule. Dostávame teda, že $\Delta_{12} = \Delta_{13} = R$, a rovnice rovnováhy pre ostatné elektróny nám podobne povedia, že aj Δ_{23} je rovné R . Elektróny teda tvoria rovnostranný trojuholník. Jeho energia je (podobne ako v 1.3.3)

$$E^{\text{lítium}} = \underbrace{\frac{3}{5} \frac{k(3e)^2}{R}}_{\text{energia kladne nabitej gule}} - \underbrace{3 \frac{3ke^2}{2R} \left(3 - \frac{(R/\sqrt{3})^2}{R^2} \right)}_{\text{energia elektrónov voči guli}} + \underbrace{3 \frac{ke^2}{R}}_{\text{vzájomná energia elektrónov}} = -\frac{18}{5} \frac{ke^2}{R}.$$

Berýlium: Rovnica 1.3.2 má teraz tri členy

$$\Delta_{12} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right) + \Delta_{13} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\Delta_{13}^3} \right) + \Delta_{14} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{\Delta_{14}^3} \right) = 0. \quad (1.3.4)$$

Ak *nie* sú všetky štyri elektróny v rovine, tak tri vektory Δ sú lineárne nezávislé, a preto musia byť všetky tri výrazy v zátvorkách nula. Z rovníc pre ostatné elektróny podobne dostaneme, že všetky vzájomné vzdialenosti sú rovné R , a teda elektróny ležia vo vrcholoch pravidelného štvorstena. Energia tejto konfigurácie

je

$$E^{\text{lítium}} = \underbrace{\frac{3}{5} \frac{k(4e)^2}{R}}_{\text{energia kladne nabitej gule}} - \underbrace{4 \frac{4ke^2}{2R} \left(3 - \frac{6}{16}\right)}_{\text{energia elektrónov voči guli}} + \underbrace{6 \frac{ke^2}{R}}_{\text{vzájomná energia elektrónov}} = -\frac{27}{5} \frac{ke^2}{R}.$$

Tu sme využili, že ak je vzdialenosť vrcholov štvorstenu R , tak ich vzdialenosť od ťažiska je $\frac{\sqrt{6}}{4} R$.

Napokon, ak sú všetky elektróny v rovine, potom nemôžeme jednoducho dokázať, že všetky členy v 1.3.4 sú nula. Nepodarilo sa nám dokázať, ktoré sú rovnovážne polohy v tomto prípade (rovnostanný trojuholník a štvorec sú zrejmé príklady, ich energie sú $-4,72054 ke^2/R$ a $-5,14993 ke^2/R$, ale tieto energie sú vyššie ako v prípade štvorstena, teda nejde o základné stavy). Monte-Carlo simuláciou sme ale skúsili veľa konfigurácií v rovine, a najnižšia nájdená energia bola $-5,14 ke^2/R$ (čo je veľmi blízko hodnote energie štvorcového stavu).

Spoločný vzorec

Môžeme si všimnúť, že konfigurácie jednotlivých atómov (bod, čiara, trojuholník a štvorsten) majú niečo spoločné. Ide o konfigurácie, keď sú všetky elektróny rovnako vzdialené od stredu a zároveň čo najďalej od seba navzájom. Môžeme pozorovať, že pri N elektrónoch je dimenzia týchto útvarov $N - 1$ (bod je objekt s rozmerom nula, čiara je jednorozmerná, trojuholník dvojrozmerný a štvorsten trojrozmerný). Presne povedané sú to pravidelné $(N - 1)$ -rozmerné **simplexy**. Stačí nám o nich vedieť, že sú rovnako vzdialené od stredu a uhol medzi dvoma polohovými vektormi je $\cos(-\frac{1}{N-1})$.

Ak máme N elektrónov vo vzdialenosti r od stredu, tak celková energia atómu je

$$E^{(N)} = \underbrace{\frac{3}{5} \frac{k(Ne)^2}{R}}_{\text{energia kladne nabitej gule}} - \underbrace{N \frac{Nke^2}{2R} (3 - \rho^2)}_{\text{energia elektrónov voči guli}} + \underbrace{\frac{N(N-1)}{2} \frac{ke^2}{R\rho\sqrt{2 + \frac{2}{N-1}}}}_{\text{vzájomná energia elektrónov}},$$

kde sme zadefinovali bezrozmernú vzdialenosť $\rho = r/R$. Keď sa budeme snažiť nájsť minimum energie voči ρ , tak minimum dosiahneme pre hodnotu

$$\frac{d}{d\rho} E^{(N)} = 0 \implies \rho = \sqrt{\frac{N-1}{2N}}.$$

Táto hodnota ρ zodpovedá práve simplexu, ktorého hrany (vzdialenosť 2 elektrónov) je práve R . Hodnota energie v minime je potom

$$E^{(N)} = -\frac{ke^2}{R} \frac{3}{20} N(N+5).$$

Tento výsledok sedí s našimi predchádzajúcimi vzťahmi. Čo sa deje pre väčšie atómy? Našli sme všeobecný vzťah? Žiaľ, $(N - 1)$ -rozmerný simplex vyžaduje $N - 1$ rozmerov, takže pri bóre ($N = 5$) už nemáme nazvyš štvrtý rozmer v priestore. Vďaka tomuto dodatočnému obmedzeniu, môžeme očakávať, že uvedený vzťah bude dolným odhadom energie. Vyššie atómy sú vo všeobecnosti náročnejšie na riešenie a riešenia už nemusia byť také symetrické. Napríklad pre 5 elektrónov (na základe numerickej simulácie) je základná konfigurácia trigonálna bipyramída a vzdialenosti elektrónov trojuholníkovej podstavy od stredu sú trochu iné oproti vzdialenosti vrcholov pyramíd od stredu. Preto pre vyššie atómy sa nedá očakávať pekný uzavretý tvar riešenia. O tom, ako veľmi náročné je nájsť riešenie v podobnej úlohe, sa môžete viac dočítať [tu](#).