Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 15. 01. 2023

1.1 Cesta okolo sveta za 80 dní **9 bodov**

Samo a Mary pozerali film Cesta okolo sveta za 80 dní a zaujalo ich, aký efekt môže mať špeciálna teória relativity na dobu trvania takejto cesty. Nedalo im to, a tak si každý vybrali pero a papier a začali rátať. Uvažovali cestovateľa pohybujúceho sa po rovníku konštantou rýchlosťou $v \ll c$.

Samo najprv argumentoval, že určite bude tento efekt zanedbateľný, veď rýchlosti parníkov boli v 19. storočí nie zrovna podobné rýchlosti svetla. Mary však nedalo a ako dlhoročná riešiteľka FKS tušila, že to nebude také jednoduché. A naozaj, vyšlo jej, že časová dilatácia bude nenulová aj pre nekonečne pomalého cestovateľa.

Rozmyslite si, na čo Samo zabudol a pomôžte mu rozlúsknuť tento problém. Konkrétne, spočítajte veľkosť tejto relativistickej časovej dilatácie medzi hodinami, ktoré sú celý čas umiestnené na tom istom bode na rovníku a takými, ktoré sa vydajú na (pomalú) cestu okolo sveta po rovníku rýchlosťou v. Ukážte, že výsledok je nenulový a v prvom ráde nezávisí od rýchlosti v.

Ako sa zmení výsledok, keď trajektória nebude rovnobežka?

Hint k poslednej časti

Oplatí sa pozrieť na trajektóriu z ortografickej projekcie so stredom umiestneným v severnom póle[1]*. Odporúčame trajektóriu parametrizovať pomocou uhlov ako závislosť $\theta(\varphi)$, kde θ, φ majú bežný význam ako uhly v sférických súradniciach.*

1.2 Gravitácia **9 bodov**

Máme gravitačne viazané teleso, napríklad homogénnu guľu. Asi tušíte, že na jej rozdelenie na jednotlivé čiastočky musíme vynaložiť určitú energiu, ktorú nazveme gravitačná väzbová energia. Lenže podľa $E = mc^2$ by teda potom hmotnosť Zeme mala byť odlišná, ako súčet hmotností jej zložiek. Spočítajte o koľko. (Dbajte aj na znamienko tejto zmeny.)

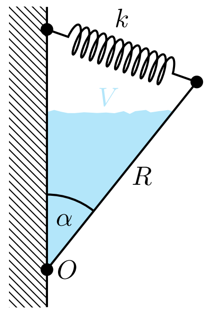
Je tento výsledok univerzálny, t. j. platí pre rôzne tvary homogénneho telesa? Svoje tvrdenie odargumentujte.

1.3 Odpružené koryto **9 bodov**

Uvažujme sústavu koryta s vodou a pružinkou zobrazenú na obrázku. Koryto na vodu je tvorené z pevnej steny (vľavo) a pohyblivej nehmotnej steny (vpravo), ktorá sa otáča okolo osi O. Keď koryto naplníme vo-

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Orthographic_map_projection#/media/File:Orthographic_with_Tissot's_Indicatrices_of_Distortion.svg

dou s objemom V, tieto steny budú zvierať uhol α. Spredu a zozadu je koryto utesnené stenami vzdialenými L (dĺžka koryta). Výška pohyblivej steny je R. Pružinka má nulovú pokojovú dĺžku pri prázdnom koryte, tuhosť k a je upevnená na pevnej stene vo vzdialenosti R od osi O a na konci pohyblivej steny tiež vo vzdialenosti R od osi O.



Obrázok 1.3.1: *Koryto*

1. Pomocou rovnováhy síl nájdite vzťah medzi uhlom α a objemom V vody v koryte. Následne zistite maximálny objem V_M vody, ktorý je koryto schopné udržať v rovnováhe. *V tejto podúlohe predpokladajte, že koryto je dostatočne veľké na to, aby sa doň voda zmestila fyzicky.*
2. Teraz, pre daný uhol α, geometricky nájdite objem vody V_P, pri ktorom je koryto naplnené vodou až po okraj (horný koniec pohyblivej steny).
3. Kedy sa objemy V_M a V_P zhodujú, a aká by vtedy musela byť tuhosť k_{MP} pružinky?
4. Do koryta s pružinou s tuhosťou $k \ll k_{MP}$ prilievame vodu prítokom Q. Predpokladajte, že tento prítok je dostatočne malý na to, že koryto je vždy v rovnováhe. Popíšte čo sa bude diať. Myslite na to, že niektoré rovnovážne polohy môžu byť nestabilné.

1.4 Fontána **9 bodov**

Slávny vodotrysk v Ženeve strieka vodu rýchlosťou okolo 200 $\mathrm{kmh^{-1}}$ až do výšky 140 m. Ak fúka ľahký vánok rýchlosťou 1 $\mathrm{ms^{-1}}$, ako ďaleko od zdroja vodotrysku dopadajú vodné kvapky na hladinu? Predpokladajte, že vodné kvapky s polomerom 1 mm sa sformujú hneď pri vystrieknutí vody z ústia vodotrysku, a potom už mezi sebou neinteragujú. Taktiež po celú dobu predpokladajte laminárne prúdenie vzduchu okolo vodných kvapiek s odporom vzduchu závislým od rýchlosti lineárne ako $\boldsymbol{F} = -C\boldsymbol{v}$.

1.5 Slnečný panel **9 bodov**

Jano si chce namontovať na záhradu slnečný panel. Kúpil si 10 $\mathrm{m^2}$ panela, no nebol si istý, pod akým uhlom si ho má namontovať. Viete mu poradiť?

1. Spočítajte najskôr polohu Slnka v priebehu dňa 21.03., ak Jano býva v Nových Zámkoch.
2. S použitím počítača zistite optimálny uhol, pod akým má Jano namontovať svoj panel, aby vyrobil čo najviac elektrickej energie.

1.6 Rotácie **12 bodov**

Tuhé teleso je nezdeformovateľné, t. j. nemení svoj tvar. Je to veľmi dobrá aproximácia mnohých skutočných telies (kovy, drevo, tvrdé plasty, atď.), lebo pri bežných tlakoch a stresoch je zmena tvaru telesa väčšinou zanedbateľná.

V tejto úlohe sa zameriame na rotácie takýchto telies. Úloha je na pokračovanie: prvá časť je v zimnej sérii a druhá bude v letnej.

Pre popis rotácií telies začneme zvolením vzťažnej sústavy. Ponúkajú sa nám dve – buď sa budeme na systém pozerať z inerciálnej vzťažnej sústavy s pevnými súradnicovými osami danými jednotkovými bazovými vektormi $\boldsymbol{e}'_i$ alebo z neinerciálnej sústavy spojenej s rotujúcim telesom so súradnicovými osami $\boldsymbol{e}_j(t)$.[2] [3]

Vezmime si všeobecný vektor[4] $\boldsymbol{A}(t)$, ktorý sa môže meniť v čase. Označme jeho súradnice v inerciálnej sústave ako $(A'_i(t))_{1\leqslant i\leqslant 3} = (A'_1(t), A'_2(t), A'_3(t))$ a podobne pre neinerciálnu sústavu. Potom z definície platí $\boldsymbol{A}(t) = \sum_{i=1}^{3} A'_i(t)\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} A_j(t)\boldsymbol{e}_j(t)$. Jeho časová derivácia potom je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_j}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_j = \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_i + A_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}, \tag{1.6.1}$$

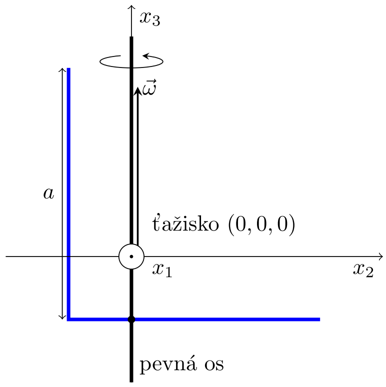
prestali sme označovať časovú závislosť veličín pomocou (t), keďže je zjavná z predošlého odseku. V poslednom kroku sme využili, že ak teleso rotuje konštantnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, platí $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}t} = \omega \times \boldsymbol{e}_i$. Ide o to, že bázové vektory neinerciálnej sústavy menia smer, takže zmena zložiek vektora v inerciálnej sústave $\frac{\mathrm{d}A'_i}{\mathrm{d}t}$ nemusí byť rovnaká, ako zmena zložiek vektora v rotujúcej sústave $\frac{\mathrm{d}A_j}{\mathrm{d}t}$.

1. Dosadením vektora polohy $\boldsymbol{r}$ hmotného bodu (napríklad muchy) ako vektor $\boldsymbol{A}$ a pracovaním len so súradnicami vektorov, overte, že ak v inerciálnej sústave pôsobí na bod sila $\boldsymbol{F}$, potom Newtonov 2. zákon nebude v neinerciálnej sústave platiť. Ako by sme museli predefinovať silu v neinerciálnej sústave, aby Newtonov zákon platil naďalej?

Toto je pôvod odstredivej a Coriolisovej sily a dôvod prečo sa nazývajú fiktívne.

2. Majme teleso zložené z dvoch rovnakých homogénnych hmotných úsečiek hmotnosti m pevne spojených pod pravým uhlom (viď 1.6.1). Takéto teleso môže predstavovať 2D model stoličky. Stolička je pevne uchytená uchytená o tyč ako na obrázku a okolo tejto tyče rotuje konštantnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$. Spočítajte odstredivé sily pôsobiace na dve časti stoličky. Následne zistite, akým momentom sily pôsobí rotujúca stolička na tyč o ktorú je uchytená. *Gravitáciu neuvažujte.*

[2] (t) značí, že tieto vektory sú funkciou času (narozdiel od $\boldsymbol{e}'_i$), čo je očividné keďže sú spojené s rotujúcim telesom.
[3] Budeme používať karteziánske osi, a teda v rámci jednej bázy všetky tri jednotkové vektory sú vzájomne kolmé.
[4] Napríklad polohu lietajúcej muchy v miestnosti



Obrázok 1.6.1: *Stolička*

Moment hybnosti tuhého telesa okolo jeho ťažiska je

$$\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\,\mathrm{d}m, \tag{1.6.2}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor od ťažiska telesa k infinitezimálnemu elementu o hmotnosti dm. Integrál je cez celé teleso. Teleso rotuje okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom s okamžitou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$. Z rovnice 1.6.2 sa dá odvodiť vzťah mezi zložkami momentu hybnosti a zložkami uhlovej rýchlosti

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}, \quad \text{alebo} \quad \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 \\ J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3 \\ J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3 \end{pmatrix}. \tag{1.6.3}$$

Kde zložky tenzoru (matice) momentu zotrvačnosti $\boldsymbol{J}$ sú

$$J_{11} = \int r_2^2 + r_3^2\,\mathrm{d}m, \quad J_{12} = J_{21} = -\int r_1 r_2\,\mathrm{d}m,$$

$$J_{22} = \int r_3^2 + r_1^2\,\mathrm{d}m, \quad J_{23} = J_{32} = -\int r_2 r_3\,\mathrm{d}m,$$

$$J_{33} = \int r_1^2 + r_3^2\,\mathrm{d}m, \quad J_{31} = J_{13} = -\int r_1 r_3\,\mathrm{d}m.$$

Pre všetky tuhé telesá však existuje vzťažná sústava, kde nediagonálne zložky tenzora (matice) momentu zotrvačnosti (J_{ij} pre $i \neq j$) sú nulové. V takom prípade voláme osi tejto vzťažnej sústavy *hlavnými osami* telesa (tieto tri osi sú na seba vždy kolmé). Pre jednoduché telesá sú hlavné osi ľahko uhádnuteľné .. napríklad pre kváder sú to tri osi pozdĺž jeho strán. Pre komplikovanejšie telesá uľahčuje problém nájdenie symetrií, keďže potom smery hlavných osí telesa vždy súvisia s existujúcimi symetriami.

3. Aké dve symetrie má stolička z podúlohy 2? Ako budú smerovať jej tri hlavné osi? Odôvodnite svoje tvrdenie pomocou faktov z predošlého odseku.

4. Pre stoličku z podúlohy 2 spočítajte jej maticu momentu zotrvačnosti vzhľadom k súradnicovej sústave danej hlavnými osami. Určte taktiež vektor momentu hybnosti a aj jeho časovú deriváciu. Ako súvisí časová derivácia momentu hybnosti s momentom sily z úlohy 2?