

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Cesta okolo sveta za 80 dní

Prvá časť

- Základný princíp spočíva v tom, že Zem nie je stacionárna, ale rotuje okolo svojej osi s periódou jeden deň. Aj keď rýchlosť pohybu okolo (???)
- To pridáva konštantnú rýchlosť $u = \omega R$, na ktorú Samo zabudol. Rotácia Zeme je takisto zápletká spomínaného filmu, kde nakoniec zistia že majú o jeden deň naviac. (V princípe je to tak nepriama nápoveda ku správne riešeniu).
- Ak pridáme túto rýchlosť do faktoru γ , získame γ_{stacio} a γ_{pohyb} pre hodiny, ktoré sú

$$\gamma_{stacio} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \gamma_{pohyb} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v+u)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2 + 2uv}{c^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2 + 2uv}{c^2}}},$$

takže rozdiel časových dilatácií je:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_0(\gamma_{pohyb} - \gamma_{stacio}) = t_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2 + 2uv}{c^2}}} \right) \\ &\approx t_0 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} - 1 - \frac{u^2 + 2vu}{2c^2} \right) \\ &= -t_0 \frac{2vu}{2c^2} \\ &= -\frac{2\pi R}{v} \frac{2vu}{2c^2} \\ &= -\frac{4\pi R^2 \omega}{c^2}, \end{aligned}$$

čo je výsledok, ktorý nezávisí od rýchlosti, a teda aj pre nekonečne pomalého cestovateľa bude časová dilatácia nenulová.

Druhá časť

Čo ak trajektória nie je po rovníku? Potom sa rýchlosti sčítavajú pomocou Pytagorovej vety:

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$$

kde $v_{\parallel}$, $v_{\perp}$ sú zložky rýchlosti cestovateľa pozdĺž a kolmo na rovníku.

Ku rýchlosti po rovnobežke musíme pričítať rýchlosť Zeme v danom bode. Tá je $u = \omega R \sin \theta$, čiže celková rýchlosť je:

$$\gamma_{pohyb} = \left(1 - \frac{v_{\perp}^2 + (\omega R \sin \theta + v_{\parallel})^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

$$\approx \left(1 + \frac{v_{\perp}^2}{2c^2} + \frac{\omega^2 R^2 \sin^2 \theta}{2c^2} + \frac{2\omega R v_{\parallel} \sin \theta}{2c^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{2c^2} \right)$$

zatiaľ čo $\gamma_{stacio} = \left(1 - \frac{\omega^2 R^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right)^{-1/2} \approx \left(1 + \frac{(\omega R \sin \theta)^2}{2c^2} \right)$.

Rozdiel časov je integrál:

$$\Delta t = \int dt = \int (\gamma_{pohyb} - \gamma_{stacio}) \frac{R d\varphi}{v_{\parallel}}.$$

Teraz sa dá použiť hint a predstaviť si všetko z projekcie. Všetky časti $R \sin \theta$ sú v tejto projekcii iba kolmé vzdialenosti ku severnému pólu. V tom prípade stačí ak ich nahradíme $r = R \sin \theta$ a integrál je cez polárny uhol φ . Dostávame

$$\Delta t = \frac{R\omega}{c^2} \int r d\varphi.$$

Veľkosť integrálu je iba plocha v polárnych súradniciach. Inak povedané, je to plocha vnútri trajektórie, ak sa na ňu pozrieme z projekcie v hinte.

Navrhované bodovanie

- 3 body za zistenie správnej príčiny
- 3 body za správny výpočet (spolu s Taylorovým rozvojom)
- 3 body za dodatočnú úlohu

1.2 Gravitácia

Najskôr je potrebné zrátať túto väzobnú energiu. Predstavme si že pridávame hmotu postupne, pričom vždy získame energiu dE :

$$dE = -\frac{Gm}{r} dm = -\frac{G\rho(4/3)\pi r^3}{r} 4\pi r^2 dr$$

integrovaním získame:

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$