Fyzikálny korešpondenčný seminár, kategória FX
XVI. ročník, 2020/2021
FX, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 2. kola letnej časti

Termín odoslania 26. 07. 2021

2.1 Cesta okolo sveta za 80 dní — 9 bodov

Samo pozeral Cestu okolo sveta za 80 dní a zaujímalo ho, ako veľký efekt môže mať špeciálna teória relativity na dobu takejto cesty. Ku podivu zistil, že efekt relativity bude *približne* rovnaký *nezávisle* na tom, ako rýchlo sa bude človek pohybovať alebo ako dlho mu bude takáto cesta celkovo trvať (ak sa bude pohybovať bežnými rýchlosťami 19. storočia). Rozmyslite si, prečo by to mohlo byť tak a aký jav spolu s relativitou to spôsobuje. Spočítajte veľkosť tejto relativistickej časovej dilatácie medzi hodinami, ktoré sú celý čas umiestnené na tom istom bode na rovníku a takými, ktoré sa vydajú na (veľmi pomalú) cestu okolo sveta po rovníku.

Ako sa zmení výsledok, keď trajektória nebude po rovníku?

Hint ku poslednej časti: *Oplatí sa pozrieť na trajektóriu z ortografickej projekcie so stredom umiestneným v severnom póle*[1]*. Odporúčame trajektóriu parametrizovať pomocou uhlov ako závislosť $\theta(\varphi)$, kde θ, φ majú bežný význam ako uhly v sférických súradniciach.*

2.2 Vlnky — 9 bodov

Uvažujme kvapalinu, pre ktorú platí rovnica kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

kde $\vec{v}$ je rýchlosť kvapaliny a ρ je hustota kvapaliny.

1) Za určitých podmienok môžeme definovať tzv. skalárny potenciál Φ, pre ktorý platí $\vec{v} = \nabla\Phi$ a $\nabla^2\Phi = 0$. Ukážte za akých podmienok tieto rovnice platia.

2) Ak je kvapalina v gravitačnom poli a má otvorený povrch, môžeme pre jej povrch ukázať, že platí

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)\bigg|_{povrch} = 0$$

Spočítajte vlny na povrchu nekonečnej kvapaliny s nekonečnou hĺbkou v homogénnom gravitačnom poli (Gravity waves). Ako bonus sa môžete pokúsiť dokázať uvedenú rovnicu.

3) Spočítajte vlny na povrchu kvapaliny v hranatej nádobe so stenami a, b a s hĺbkou h v homogénnom gravitačnom poli.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Orthographic_map_projection#/media/File:Orthographic_with_Tissot's_Indicatrices_of_Distortion.svg

4) Spočítajte prechádzajúcu úlohu s tým, že sa jedná o viskóznu kvapalinu v nádobe, ktorou kmitáme v smere v rovine podstavy nádoby. Na výpočet môžete použiť Navier-Stokesovu pohybovú rovnicu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{g}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}.$$

kde $\vec{v}$ je rýchlosť kvapaliny, p je tlak kvapaliny, ρ je hustota kvapaliny a ν kinetická viskozita. Je dôležité si uvedomiť čo môžeme v rovnici zanedbať.

2.3 Kvantová mechanika a magnetické pole **9 bodov**

Cieľom tejto úlohy je využiť viacero pokročilých fyzikálnych koncepto na spočítanie javu, ktorý približne pred 60 rokmi zmenil naše chápanie elektromagnetizmu. Celá úloha je rozdelená do veľa častí, a preto odporúčame hoci aj čiastočné riešenia posielať iteratívne.

Aharonovov-Bohmov efekt je experimentálne potvrdený zaujímavý vplyv magnetického poľa na nabité častice, ktorý ukazuje, že kvantová mechanika ovplyvňuje aj bežne pozorovateľný svet. V tejto úlohe popíšeme teóriu, ktorá ho vysvetlí, v niekoľkých skoro úplne nezávislých podúlohách, a na vás ostáva využiť tento návod na výpočet efektu. Podúloh je veľa, ale preto nie sú príliš ťažké a môžete si aj vybrať, ktoré budete riešiť.

1. Aharonovov-Bohmov experiment je len upravený dvojštrbinový experiment. Máme prepážku – rovinu $x = 0$ s dvomi štrbinami v bodoch $(0, \pm a/2)$, lúč elektrónov s rýchlosťou v dopadajúci na štrbiny zo vzdialeného zdroja a tienítko rovnobežne s prepážkou vo vzdialenosti d za ňou, viď obrázok TODO. Elektrónový lúč je analogický svetelnému, hlavný rozdiel je že sa neskladá z nenabitých fotónov. Spočítajte (kvantovo alebo pomocou klasickej optiky) závislosť intenzity elektrónového lúča dopadajúceho na tienítko od pozície y na ňom.

2. Pred tienitko pridáme cievku s N závitmi, polomerom R a dĺžkou $l \gg R$, ktorou preteká prúd J. Prepážka je nevodivá a nemagnetická. Akú zmenu intenzity elektrónového lúča na tienítku predpovedá klasický elektromagnetizmus a prečo?

   Popíšme si teraz formálne klasickú EM teóriu. Vo vákuu máme rozloženú hustotu náboja ρ a hustotu prúdu $\vec{j}$ ($\vec{j} \cdot \Delta \vec{S}$ je prúd tečúci malou plochou $\Delta \vec{S}$), ktoré závisia aj na čase. Elektrická intenzita $\vec{E}$ a magnetické pole $\vec{B}$ sú dané Maxwellovými rovnicami

   $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0\,, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\,, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0\,, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}\,.$$

   Elektrostatiku zjednodušujeme pomocou skalárneho potenciálu φ, ktorý spĺňa $-\vec{\nabla}\varphi = \vec{E}$. To funguje len vďaka $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, ale aj magnetickú indukciu vieme vyjadriť pomocou tzv. vektorového potenciálu $\vec{A}$ ako $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$.

3. Upravte Maxwellove rovnice tak, aby namiesto $\vec{E}$ a $\vec{B}$ obsahovali vektorový potenciál $\vec{A}$ a vhodne definovaný skalárny potenciál.

4. Nájdite potenciály pre prípad cievky z podúlohy 2. Os cievky má súradnice (x_c, y_c).

Interpretácia kvantovej mechaniky je storočným filozofickým problémom. Najbežnejšia, Kodaňská interpretácia, pracuje s komplexnou vlnovou funkciou ψ, ktorá popisuje stav systému a nie je priamo merateľná, ale napr. pre jednu časticu $|\psi(\vec{r})|^2$ určuje hustotu pravdepodobnosti, že časticu práve nájdeme v bode $\vec{r}$, a jej časový vývoj popisuje Schrödingerova rovnica. Na vysvetlenie tohto efektu sa ale veľmi dobre hodí iná interpretácia cez Feynmanov dráhový integrál:

- Uvažujme **všetky možné trajektórie** elektrónu v lúči zo zdroja do vybraného bodu na tienitku.
- Pre každú trajektóriu spočítajme integrál Lagrangiánu L tohto elektrónu pozdĺž nej, teda $S = \int L(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)\mathrm{d}t$, tzv. akciu. Trajektórii priraďme váhu $e^{iS/\hbar}$.
- Hustota pravdepodobnosti, že v tomto bode elektrón nameráme, je priamo úmerná $|\int e^{iS/\hbar}|^2$, kde integrujeme cez všetky trajektórie. Vlnovú funkciu teda môžeme definovať aj ako tento integrál (s vhodnou normalizačnou konštantou).

Výhodou tohto prístupu je, že nepotrebuje matematický aparát bežne používanej kvantovej mechaniky (lineárnu algebru) ani vlnovú funkciu – pracujeme iba s Lagrangiánom z klasickej mechaniky a integrálmi komplexných funkcií. Na druhej strane, počítať integrál cez nekonečno trajektórií nie je také ľahké ako o ňom hovoriť.

Objavilo sa tu ale slovo Lagrangián. To je kľúčová funkcia v Lagrangeovej mechanike: všetky pohybové rovnice mechanického systému sú dané Euler-Lagrangeovými rovnicami

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial L(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial r_i} \quad \forall i\,.$$

Tieto rovnice sú ekvivalentné Newtonovmu zákonu sily. Napr. pre pohyb klasického hmotného bodu v potenciáli $\varphi(\vec{r})$, kde $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$, platí (pozor na znamienko pri potenciáli!) $L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \varphi(\vec{r})$. Pohyb elektrónu v EM poli je o niečo zložitejší, ale Lagrangián preňho vieme tiež zostaviť.

5. Nájdite Lagrangián elektrónu v EM poli ekvivalentný Lorentzovej sile a vyjadrite ho pomocou EM potenciálov.

Pri výpočte dráhového integrálu pre pohyb častice v prázdnom priestore a potenciáli φ sa ukazuje, že dráhový integrál je priamo úmerný $e^{iS_m/\hbar}$, kde S_m je hodnota akcie S zodpovedajúca klasickej trajektórii (je to tiež minimálna hodnota akcie – Euler-Lagrangeove rovnice sú nutnou podmienkou minima pre časový integrál Lagrangiánu závisiaceho iba na polohe, rýchlosti a čase). Dôvod je ten, že pre klasické trajektórie je $S \gg \hbar$, príspevky k integrálu zo všetkých možných trajektórií sa prudko menia a nakoniec sa navzájom vyrušia tak, že ostane iba $e^{iS_m/\hbar}$ prenásobené vhodnou konštantou. Tento fakt môžeme využiť pri výpočte podúlohy 1 (bez cievky) aj pri zapracovaní vplyvu na čase nezávislého magnetického poľa.

6. Pomocou dráhového integrálu vypočítajte, ako sa zmení intenzita elektrónového lúča na tienítku pre prípad cievky z podúlohy 2. Uvažujte iba trajektórie v rovine obrázka.

V elektrostatike k potenciálu môžeme pripočítať skalárnu konštantu bez zmeny fyzikálneho správania – tzv. kalibrácia.

7. Čo môžeme pripočítať k dvojici elektromagnetických potenciálov? Vieme napr. každé EM pole popísať potenciálmi, ktoré spĺňajú $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$? Overte, že výsledok podúlohy 6 nezávisí na kalibrácii EM potenciálov.

Ako (nebodovaný) bonus sa môžete zamyslieť nad ekvivalentným efektom spôsobeným elektrickým poľom namiesto magnetického.

Matematická pomôcka: Počítanie s gradientmi, divergenciami, rotáciami a skalárnym/vektorovým násobením všeobecne v 3D sa dá výrazne zjednodušiť pomocou Kroneckerovho δ_{ij} a Levi-Civitovho ε_{ijk} symbolu. Súradnice (indexy) označujeme $1, 2, 3$ namiesto x, y, z, čím získame kompaktnejší zápis. Platí

- δ_{ij} je 1 ak $i = j$, inak 0
- ε_{ijk} je 1 ak indexy (i, j, k) sú jedna z permutácií $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ alebo $(3, 1, 2)$
- ε_{ijk} je -1 ak indexy (i, j, k) sú jedna z permutácií $(3, 2, 1)$, $(1, 3, 2)$ alebo $(2, 1, 3)$
- ε_{ijk} je 0 ak indexy (i, j, k) nie sú permutácia
- skalárny súčin $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{ij} \delta_{ij} u_i v_j$
- vektorový súčin $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ spĺňa $w_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$
- konkrétne pre $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$ platí $w_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} v_k(\vec{r}, t)$
- dajú sa odvodiť užitočné rovnice ako $\sum_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ alebo $\sum_{ij} \delta_{ij}^2 = 3$