Fyzikálny korešpondenčný seminár, kategória FX
XIII. ročník, 2017/2018
FX, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Zadania 1. kola zimnej časti

Termín odoslania 28. 01. 2018

1.1 Lampión

Edmund sa rozhodol, že si zostrojí lampión poháňaný pevným liehom a rád by jeho správanie popísal zjednodušeným fyzikálnym modelom.

K dispozícii má elastický balón s konštantným množstvom vzduchu o hmotnosti $m_V = 1$ kg a tabletu pevného liehu s hmotnosťou $m_0 = 2$ g (počiatočná hmotnosť paliva). Zvyšok konštrukcie má hmotnosť $m_K = 100$ g. Pevný lieh sa spaľuje rýchlosťou $\alpha = 48\ \mathrm{gh^{-1}}$ a má výhrevnosť $\beta = 31\ \mathrm{MJkg^{-1}}$, pričom len $\eta = 60\ \%$ uvoľneného tepla sa odovzdá vzduchu, ktorý je v balóne (predpokladajte, že táto výmena tepla sa deje okamžite).

Ďalej uvažujte, že vzduch sa správa ako ideálny plyn, a že okolitý vzduch má rovnaký tlak a teplotu $T_0 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ vo všetkých výškach, kde sa lampión dostane. Merná tepelná kapacita vzduchu pri konštantnom tlaku je $c = 1{,}0\ \mathrm{kJkg^{-1}K^{-1}}$. Odpor vzduchu zanedbajte.

Ak čas začneme merať v momente zapálenia tablety, pomôžte Edmundovi zistiť nasledovné:

(a) Čas t_0, keď sa lampión odlepí od zeme a čas t_1, keď sa minie palivo.

(b) Aké sú nevyhnutné podmienky, aby sa lampión odlepil od zeme? Sú splnené pre zadané podmienky?

(c) Rýchlosť $v_1 = v(t_1)$ a výšku $h_1 = h(t_1)$, keď sa minie všetko palivo.

(d) Grafy závislostí $v(t)$ a $h(t)$ pre zadané hodnoty a pre všetky fázy letu.

Pre zjednodušenie výrazov použite nasledovné bezrozmerné parametre: $\gamma = \frac{m_K+m_V+m_0}{m_V}$, $\delta = \frac{\eta\beta}{T_0 c}$.

1.2 Sférická častica v špagetách

Hlavným hráčom medzi silami na poli nanotechnológií založených na nepolárnych molekulách (napríklad polyméroch) je tzv. disperzná sila. Potenciálna energia tejto príťažlivej sily pre dva atómy závisí od šiestej mocniny ich vzdialenosti.

Keď ľudia zistili, ako vyzerá energia pre dva atómy – bodové častice, ako správni fyzici odvodili energiu pre dve sférické telesá vo vákuu:

$$E(z, R_1, R_2) = -\frac{A}{6}\left(\frac{2R_1R_2}{z^2-(R_1+R_2)^2} + \frac{2R_1R_2}{z^2-(R_1-R_2)^2} + \ln\left[\frac{z^2-(R_1+R_2)^2}{z^2-(R_1-R_2)^2}\right]\right),$$

kde z je vzdialenosť ich stredov, R_1 a R_2 ich polomery. A je konštanta charakteristická pre dvojicu materiálov telies, platí

$$A = \rho_1\rho_2 k,$$

kde ρ_i je počet atómov na jednotku objemu materiálu a k konštanta závisiaca od typu atómov.

Úloha 1

Podrobným pohľadom na vzorec vyššie zistíme, že ak by sme nemenili zloženie, no zdvojnásobili všetky rozmery a vzdialenosti týchto dvoch telies, výsledná energia sa nezmení. Je táto vlastnosť špecifická pre dve sféry alebo platí pre ľubovoľné tvary telies? Zdôvodnite.

Úloha 2

Odvoďte potenciálnu energiu guľatej nanočastice s polomerom R vo vzdialenosti d od nekonečnej platne s hrúbkou T, ak spolu interagujú disperzne s konštantou A.

Úloha 3

Odvoďte potenciálnu energiu guľatej nanočastice s polomerom R plne ponorenej vo vrstve (platni) polyméru s hrúbkou T v závislosti od pozície častice vo vrstve.

1.3 Venuša

Astronomického nadšenca Kvíka minule zaujala nasledujúca otázka. Pri akom uhle od Slnka je Venuša zdanlivo najjasnejšia? Uvažujte, že ani jedna z planét nemá atmosféru, ich orbity sú dokonale kruhové a ležia v jednej rovine. Venušu považujte za dokonale matnú.

1.4 Delostrelec

Kim vystrelil z kanóna zvislo hore do výšky h nad zemský povrch. Aký je maximálny teoretický dostrel Kimovho dela (teda vzdialenosť po povrchu, kam môže náboj dopadnúť)? Uvažujte nerotujúcu guľatú Zem bez atmosféry a trvanie impulzu zanedbajte.

1.5 Malý princ

Pri čítaní Malého princa sa vedúci zamysleli, ako by vyzeral život na jeho planétke. Aká hustá by musela byť, aby na jej povrchu bolo tiažové zrýchlenie ako na Zemi, t. j. 1 g? A aká najmenšia by mohla byť, aby na jej povrchu mohol byť tlak 100 kPa pri teplote 300 K, ak predpokladáme rovnaké zloženie atmosféry?

1.6 Wignerov kryštál

Z bežnej skúsenosti sme zvyknutí, že pri atmosférickom tlaku vieme dosiahnuť fázovú zmenu skupenstva väčšiny materiálov len vďaka znižovaniu teploty (napr. prechod voda-ľad). Pri premene na tuhé skupenstvo sa usporadúvajú jadrá atómov do kryštalickej štruktúry, valenčné elektróny okolo jadier a voľné elektróny (ak materiál nejaké vlastní) sa takmer voľne hýbu priestorom materiálu. Za určitých podmienok vedia prekvapivo aj voľné elektróny prejsť do lokalizovaného usporiadaného stavu, tzv. **Wignerovho kryštálu**.

V tejto FX úlohe budeme študovať z teoretického pohľadu kus kovu, ktorému vieme určitým experimentálnym spôsobom znižovať koncentráciu voľných elektrónov, čím v konečnom dôsledku spustíme fázový prechod elektrónov do Wignerovho kryštálu.

Fermiho plocha Makroskopický homogénny kus kovu budeme modelovať ako plyn elektrónov s danou koncentráciou n v kocke s rozmermi $L \times L \times L$. Zatiaľ budeme predpokladať, že medzi nimi neexistujú elektrostatické interakcie. Na jadrá atómov a gravitáciu na chvíľu tiež zabudnime, čiže prakticky nám ostal neinteragujúci elektrónový plyn vo vákuu.

Vďaka periodickej okrajovej podmienke vlnovej funkcie sa v kvantovej mechanike dá ukázať, že hybnosť každého elektrónu musí nadobúdať len hodnoty:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{2\pi\hbar}{L}(a, b, c),$$

kde čísla a, b, c sú celé čísla. Kvantová mechanika takisto hovorí, že elektrón vlastní spin orientovaný buď *nahor* ↑ alebo *dole* ↓ a Pauliho vylučovací princíp dodáva, že každý elektrón v plyne sa nachádza v rôznom stave, čiže má svoju výnimočnú kombináciu čísel a, b, c a spinu. Inými slovami, v plyne nenájdeme dva elektróny s rovnakými vektormi hybnosti a zároveň rovnakým spinom!

Úloha 1

Energia voľného elektrónu s hybnosťou $\vec{p}$ je $\varepsilon_{\vec{p}} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$, pričom elektróny budú v snahe minimalizovať celkovú energiu plynu postupne obsadzovať stavy s najnižšou energiou. V hybnostnom priestore, ktorého osi tvoria hodnoty zložiek vektora $\vec{k}$, sa takto geometricky vytvorí guľa, v ktorej vnútri sa nachádzajú len obsadené stavy a vonku neobsadené. Aký je polomer R takejto gule?

Útvar obsadených stavov v hybnostnom priestore môže v reálnych situáciach nadobúdať rôzne tvary (guľa je špeciálny prípad neinteragujúceho voľného plynu). Fyzikálna terminológia pre takýto útvar je **Fermiho plocha**.

Úloha 2

Vnútro Fermiho gule je v našom prípade obrovský počet diskrétnych bodov. Keďže koncentrácia elektrónov n zvykne byť vysoké číslo (rádovo $10^{15}\ \mathrm{m}^{-3}$), možno sieť bodov považovať za kvázispojitú a v rôznych výpočtoch použiť aproximáciu

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\vec{k}} = \int \mathrm{d}^3\vec{k}\,.$$

S touto pomôckou vypočítajte celkovú energiu Fermiho gule E_F.

Interagujúci Coulombovský plyn

Vo všeobecnosti si nemôžeme dovoliť zanedbať elektrostatické interakcie, ktorými pôsobí každý elektrón na všetky ostatné. Ak je ich koncentrácia v kove n, každému elektrónu vieme priradiť jeho mikroskopický objem n^{-1}, ktorý si pre jednoduchosť môžeme predstaviť ako guľu s objemom $\frac{4}{3}\pi r_0^3$. Teda typická vzdialenosť medzi najbližšími elektrónmi je r_0. Z rozmerových dôvodov môžeme teda tvrdiť, že typická kinetická energia na jeden elektrón je

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{\hbar^2 k^2}{m} \sim \frac{\hbar^2}{m r_0^2}.$$

Úloha 3

Zhodnoťte, ako vplýva koncentrácia elektrónov na pomer medzi kinetickou a potenciálnou energiou systému. Približne pri akej hodnote n_0 nastáva rovnosť?

Wignerov kryštál

Zahrňme teraz do teórie aj prítomnosť kladne nabitých jadier. Najjednoduchší pohľad na problematiku je taký, že si kladne nabité jadrá nepredstavíme ako sediace na konkrétnych miestach v priestore, ale že je ich náboj *rozmazaný na pozadí* a elektróny v takomto pozadí *plávajú*. Pomocou zložitejšej kvantovej mechaniky sa dá ukázať, že pri dostatočne nízkej koncentrácii n prejde systém interagujúceho elektrónového plynu do kryštalického stavu – *Wignerovho kryštálu*. Elektróny takto zaujali konkrétnu geometriu a kmitajú okolo svojich rovnovážnych polôh. Takúto uväznenosť si vieme predstaviť tak, že elektrón s nábojom $-e$ kmitá v guli s polomerom r_0, ktorá je nabitá kladným nábojom pozadia $+e$.

Úloha 4

S akou uhlovou frekvenciou ω_0 kmitá Wignerov elektrón? Keďže elektrón sa nachádza v stabilnom kvantovo-mechanickom stave, energia systému elektrón+guľa je daná ako:

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 - \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} + E_g,$$

kde $ E_g $ je elektrostatická energia kladne nabitej Wignerovej gule.

Úloha 5

Dopočítajte energiu elektrostatickej gule E_g a ukážte, že energia systému sa dá v bezrozmerných jednotkách napísať ako:

$$\frac{E}{\varepsilon_B} = \frac{\alpha}{r_s} + \frac{\beta}{r_s^{3/2}},$$

kde ε_B je Bohrova energia základného stavu vodíka, r_s je rovný pomeru r_0/a_B a a_B je Bohrov polomer základného stavu vodíka. Nájdite číselné hodnoty bezrozmerných konštánt α, β.

Úloha 6

Numericky na počítači nakreslite závislosť bezrozmernej energie E/ε_B od bezrozmernej vzdialenosti r_s. Pre aký pomer r_0/a_B nastáva minimum? Akej hodnote koncentrácie elektrónov n^* to zodpovedá? Aký je pomer n^*/n_0?

Záverom dodajme, že uvedený model je veľmi jednoduchý a len v hrubých črtách odráža realitu fázového prechodu elektrónového systému. Lokalizácia elektrónového plynu do kryštalickej geometrie fyzikálne interpretujeme ako prechod z kovového stavu (vedúceho prúd) do izolujúceho (nevedúceho prúd). Podľa najmodernejších numerických simulácii je Wignerov kryštál stabilný len pre $r_s > 106$ a jeho vlastnosti sú predmetom otvoreného výskumu.