Zadania 1. kola letnej časti

Termín odoslania 24. 06. 2017

1.1 Jurove pravdepodobnosti

Juro pri ceste pozoruje dopravu, ktorá prechádza okolo. Autobusy okolo neho prechádzajú v pravidelných intervaloch každých 5 minút. Autá okolo neho prechádzajú náhodne, pričom za malý čas $\mathrm{d}t$ je pravdepodobnosť, že okolo neho prejde auto $\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$, kde $\tau = 5$ min.

a) Dokážte, že priemerný počet áut, ktoré prejdú okolo Jura za jednu hodinu je 12.

b) Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo Jura prejde presne n autobusov? Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo Jura prejde presne n áut?

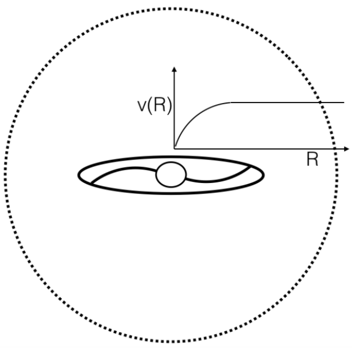
c) Aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny $\Delta_B t$, ktorá je časom medzi dvomi po sebe idúcimi autobusmi? Aké je rozdelenie tejto veličiny $\Delta_A t$ pre autá?

d) Ak prídeme na cestu v náhodnom čase, aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny $\delta_B t$, ktorá meria čas do príchodu najbližšieho autobusu? Aké je rozdelenie tejto veličiny $\delta_A t$ pre autá?

1.2 Gravitačné vlny a čierna hmota

Viditeľné časti špirálovitých galaxií, ako napríklad našej Mliečnej cesty, sú dominované plochým rotačným diskom. V typickej špirálovitej galaxii, tento disk obsahuje najviac hviezd a plynu. V tejto úlohe budeme predpokladať, že všetky objekty v disku špirálovitej galaxiie obiehajú po kružnicových trajektóriách okolo stredu galaxie a všetky tieto orbity ležia v jednej rovine.

Merania ukázali, že orbitálna rýchlosť ako funkcia vzdialenosti od stredu galaxie $v(R)$ vedú k tzv. rotačnej krivke. Mimo najvnútornejšieho stredu galaxii sú rotačné krivky typicky ploché (viď obrázok nižšie). Ploché rotačné krivky však siahajú ďaleko za oblasti, v ktorých pozorujeme najväčšie množstvo viditeľnej hmoty, naznačujúc, že väčšina hmoty je neviditeľná. V tejto úlohu budeme predpokladať, že väčšina hmoty v galaxii pripadá k tzv. sféricky symetrickému dark halo, t.j. je sféricky rozložená okolo stredu galaxie, ale nie je viditeľná.



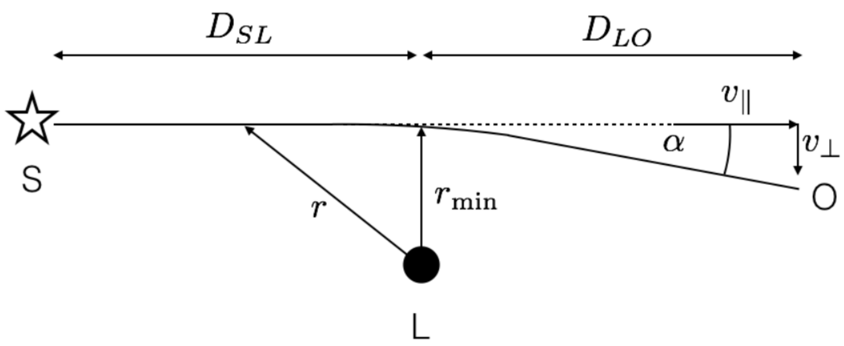
Obrázok 1: *Náčrt rotačnej krivky - závislosti orbitálnej rýchlosti $v(R)$ ako funkcie R od stredu galaxie.*

a) Nech v_c je orbitálna rýchlosť v plochej časti rotačnej krivky. Nájdite celkovú hmotnosť $M(R)$ a hustotu $\rho(R)$ dark hala pomocou v_c a R.

Fyzika za dark halami zostáva jednou z nevyriešených problémov súčasnej kozmológie. Jedným z navrhovaných riešení je, že môžu pozostávať z relatívne ťažkých kompaktných objektov, napr. čiernych dier. Tieto objeky môžu byť detekované tým, že vytvárajú efekt tzv. gravitačné šošovky, t. j. ak prejdú popred nejakú hviezdu v pozadí, svetlo pochádzajúce z tejto hviezdy bude ohnuté. Na to, aby sme však korektne vypočítali ohyb svetelných lúčov v gravitačnom poli by sme museli použiť Všeobecnú teóriu relativity. V tejto úlohe sa však skromne obmedzíme na klasickú Newtonovskú mechaniku.

Budeme predpokladať, že fotóny sú „guličky“ pohybujúce sa rýchlosťou svetla a ich pohyb sa dá opísať klasickou mechanikou. Budeme uvažovať geometriu ako na nasledujúcom obrázku. Predpokladajme, že fóton je emitovaný hviezdou S a potom prechádza vo vzdialenosti $r_{\min}$ popred objekt L, ktorý spôsobí zakrivenie trajektórie lúča, ktorý pozoruje pozorovateľ O. Ako fotón prechádza popred objekt L získa rýchlosť v_{p}, kolmú na počiatočnú dráhu lúča, čím sa efektívne vychýli o uhol α od pôvodnej trajektórie.

Môžete predpokladať, že v_{p} je rádovo menšia ako rýchlosť svetla c, fotón sa počas celého pohybu pohybuje prakticky rýchlosťou svetla a vzdialenosti D_{SL} a D_{LO} sú rádovo väčšie ako $r_{\min}$.



Obrázok 2: *Náčrt gravitačného šošovkovania.*

b) Nájdite uhol α ako funkciu hmotnosti objektu L - M_L a vzdialenosti $r_{\min}$.

Pomocou výpočtov zo Všeobecnej teórie relativity možno ukázať, že správny (relativistický) vzťah pre uhol odklonu je

$$\alpha = \frac{4GM_L}{r_{\min}c^2}\,.$$

Ak sa hviezda v pozadí, šošovkový objekt L a pozorovateľ nachádzajú presne na jednej priamke, tak ohnuté lúče z hviezdy vytvoria tzv. Einsteinov prstenec. Predpokladajte, že hviezda sa nacháza veľmi ďaleko od objektu L, t.j. $D_{\mathrm{SL}} >> D_{\mathrm{LO}}$ a ohyb svetla nastáva okamžite ako svetlo prechádza popred objekt L.

c) Ukáže, že pri týchto zanedbaniach je uhlový polomer Einsteinovho prstenca θ_E úmerný výrazu

$$\theta_E \propto \sqrt{\frac{GM_L}{D_{\mathrm{LO}}c^2}}\,.$$

1.3 Brvno

Cez brvno tvaru valca je prehodený špagát (tak, že okolo valce opisuje uhol π), na konci ktorého visí teleso s neznámou hmotnosťou m. Na to, aby teleso nezačalo padať, musíme pôsobiť silou aspoň F_1. Ak chceme teleso zdvíhať, treba pôsobiť silou aspoň $F_2 > F_1$. Určte neznámu hmotnosť závažia, ako aj koeficient trenia medzi špagátom a brvnom.

1.4 Kužeľ

Aďa má pevne uchytený plášť kužeľa (bez podstavy) s vrcholovým uhlom 2α a osou rovnobežnou s g tak, že vrchol je jeho najnižším bodom. Po jeho vnútri chce roztočiť guľôčku s hmotnosťou m, polomerom r a momentom zotrvačnosti $I = (2/5)mr^2$ tak, že množina dotykových bodov plášťa kužeľa (body, ktoré niekedy prichádzajú do kontaktu s guľôčkou) budú tvoriť vodorovnú kružnicu s polomerom L. Množina dotykových bodov guľôčky bude tvoriť tiež kružnicu (nie nutne s polomerom r). Aký má byť tento polomer ak Aďa chce, aby guľôčka obehla dookola plášťa kužeľa za čo najkratší čas? Predpokladajte, že r je omnoho menšie ako L.

1.5 Vymŕzanie

V termodynamike sa hovorí, že na každý stupeň voľnosti systému pripadá v priemere energia $1/2kT$. Samotné stupne voľnosti sa však definujú iba vymenovaním, t. j. povie sa, že

a) jednoatómová molekula plynu (napr. He, Ne, Ar) má tri stupne voľnosti za nezávislé pohyby v smere osí x, y, z,
b) lineárna molekula plynu (napr N_2, O_2, H_2, CO_2; modelujeme ju ako guľôčky spojené nehmotnými pevnými paličkami) má dva stupne voľnosti navyše za rotácie okolo osí s väčším momentrom zotrvačnosti,
c) nelineárna viacatómová molekula plynu (napr. H_2O, NH_3, CH_4; opäť sa predpokladajú pevné väzby) má stupeň voľnosti aj za rotáciu okolo tretej osi,
d) na každý oscilátor pripadajú dva stupne voľnosti (jeden za kinetickú a jeden za potenciálnu energiu).

Tak v jednotlivých prípadoch je stredná hodnota energia jednej molekuly pri teplote T postupne rovná

a) $3/2kT$,
b) $5/2kT$,
c) $3kT$ a
d) kT.

Tu by sa mal každý rozumne zmýšľajúci človek ťuknúť do hlavy, že niečo tu nesedí. Veď molekuly nemajú pevné väzby! Namiesto toho všetky atómy kmitajú okolo rovnovážnych polôh. Prečo teda neuvažujeme v prípade dvojatómových molekúl aj dva stupne voľnosti za kmitanie? A prečo jej zakazujeme rotovať okolo tretej osi? Ešte zaujímavejšie sa zdá byť, že experimentálne merané počty stupňov voľnosti často nie sú celé čísla a navyše klesajú so zmenšovaním teploty. Posledne uvedený jav sa nazýva vymŕzanie stupňov voľnosti. Ľudia jeho podstatu pochopili až po sformulovaní kvantovej mechaniky. Vy to môžete skúsiť tiež. Aby ste problém vyriešili, vezmite ako fakt Boltzmannov zákon, že pravdepodobnosť systému nachádzať sa v stave j je úmerná $e^{-E_j/kT}$, kde E_j je energia systému v tomto stave. Najprv predpokladajte platnosť klasickej fyziky, kde môžu všetky diskutované veličiny nadobúdať spojite ľubovoľné hodnoty a presvedčte sa, že vtedy naozaj

a) na pohyb v smere každej osi pripadá stredná hodnota energie $1/2kT$,
b) na rotáciu okolo každej z troch osí pripadá stredná hodnota energie $1/2kT$,
c) na harmonický oscilátor pripadá stredná hodnota celkovej energie kT.

Z kvantovej mechaniky však vyplýva, že niektoré fyzikálne veličiny v niektorých systémoch sú kvantované, zatiaľ čo iné nie. Napríklad energia za posuvný pohyb môže byť hocijaká, preto tu vyjde stredná hodnota energia posuvného pohybu rovnaká ako v klasickej teórii.[1] Vo zvyšných uvedených prípadoch však nastanú nasledovné zmeny:

d) Podľa kvantovej mechaniky môže energia rotujúcej paličky s momentom zotrvačnosti I (vzhľadom na os kolmú na paličku) nadobúdať diskrétne hodnoty $\frac{J(J+1)\hbar^2}{2I}$, kde J sú nezáporné celé čísla. Každej z týchto

[1] V skutočnosti existujú delikátne prípady, keď ani toto tvrdenie nie je celkom pravdivé. Príkladom je vymŕzanie pohybu v supratekutom héliu (pri teplotách pod 2,17 K)

energií pritom zodpovedá $2J + 1$ rôznych stavov. Numericky zistite, ako závisí stredná hodnota rotačnej energie na teplote a určte, pri akej teplote dochádza k vymŕzaniu rotačných stupňov voľnosti.

e) Podľa kvantovej mechaniky môže energia oscilátora s uhlovou frekvenciou ω nadobúdať diskrétne hodnoty $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ kde n je opäť nezáporné celé číslo. Exaktným výpočtom zistite, ako závisí stredná hodnota energie oscilátora od teploty a zistite, pri akej teplote dochádza k vymŕzaniu oscilačných stupňov voľnosti.

1.6 Peťove zrážky

Máme dva zväzky častíc letiace oproti sebe. V každom z nich je hustota časíc na jednotku objemu n a každá častica má rýchlosť veľkosti v rovnobežnú so svojim zväzkom, teda pozdĺž osi x. Plocha prierezu každého zvazku je S. Oba zväzky sa stretnú v čase 0 s v mieste 0 na x-ovej osi. Ak sa dve protiidúce častice, loptičky s polomerom r zrazia, rozptýlia sa takmer s istotou tak, že opustia zväzok (stredná voľná dráha častíc je väčšia ako hrúbka zväzku). Každá častica sa preto môže zraziť nanajvýš raz. Označme teraz počet zrážok za jednotku času, ku ktorým dôjde v mieste $\langle x, x + \mathrm{d}x\rangle$, ako $f(x)dx$. Nájdite funkciu $f(x)$ po dostatočne dlhom čase, keď sa situácia ustáli.